ORSAY
Série A, N°
N° D'ordre :
799

Université de Paris-Sud

CENTRE D'ORSAY

THESES

présentées pour obtenir le grade de

DOCTEUR ES-SCIENCES MATHEMATIQUES

par

Jean-Pierre DAX

1ère Thèse : Etude homotopique des espaces de plongements.

2ème Thèse : Propositions données par la faculté.

Soutenues le 26 juin 1971 devant la commission d'examen

Messieurs	Cartan	Président
	Cerf	
	Demazure	Examinateurs
	Haefliger	

Université de Paris-Sud

THESES

Jean-Pierre DAX

Université de Paris-Sud

CENTRE D'ORSAY

THESES

présentées pour obtenir le grade de

DOCTEUR ES-SCIENCES MATHEMATIQUES

par

Jean-Pierre DAX

1ère Thèse : Etude homotopique des espaces de plongements.

2ème Thèse : Propositions données par la faculté.

Soutenues le 26 juin 1971 devant la commission d'examen

Messieurs	Cartan	Président
	Cerf	
	Demazure	Examinateurs
	Haefliger	

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

INTRODUCTION

Ce mémoire se situe en TOPOLOGIE DIFFERENTIELLE.

Soient V^n et M^m deux variétés différentielles (1), la variété V^n étant supposée compacte sans bord. On ne suppose aucune condition sur les entiers m , $n \geqslant 0$. On note $\mathrm{Hom}(V^n,M^m)$ l'espace des applications différentiables de V^n dans M^m muni de la topologie C^∞ , $P\ell(V^n,M^m)$ le sous-espace des plongements. Soient k un entier $\geqslant 0$ et f_o un plongement de V^n dans M^m . Ce mémoire a pour objet l'étude des groupes d'homotopie relatifs $\pi_k(\mathrm{Hom}(V^n,M^m), P\ell(V^n,M^m), f_o)$. Pour $k = 0$ le problème est de déterminer si une application continue $f : V^n \to M^m$ est homotope ou non à un plongement.

Un argument de position générale (cf. III.1.3.) montre que les groupes considérés sont triviaux pour $0 \leqslant k \leqslant m-2n-1$. Le domaine ainsi défini s'appelle le domaine stable.

Moyennant des conditions sur la connexité de f_o et sur les entiers k, m, n, André Haefliger a obtenu dans [7] pour $k = 0$ et 1 certains renseignements sur ces groupes. Il montre que pour $2m-3n-3 \geqslant 0$, toute application continue $f : V^n \to M^m$ $(2n-m+1)$-connexe est homotope à un plongement. Il montre aussi que le groupe $\pi_1(\mathrm{Hom}(V^n,M^m), P\ell, f_o)$ est trivial pour $2m-3n-4 \geqslant 0$ lorsque le plongement f_o est $(2n-m+2)$-connexe. Une première étape suivie dans l'étude des groupes $\pi_k(\mathrm{Hom}(V^n,M^m), P\ell, f_o)$ a consisté à généraliser ces résultats pour des valeurs de $k \geqslant 2$. C'est le sujet de thèse que m'avait proposé Jean Cerf. J'ai ainsi pu annoncer dans [2] que pour $1 \leqslant k \leqslant 2m-3n-3$, $k \leqslant m-n-2$ et f_o $(2n-m+k+1)$-connexe, les groupes considérés sont triviaux. J'ai pu montrer par la suite (VI prop. 4.2.) que la condition $k \leqslant m-n-2$ ne pouvait pas être supprimée. Par contre on peut supprimer cette

---

(1) Dans tout ce mémoire, les variétés différentielles et les applications différentiables sont supposées de classe C^∞ .

condition si l'on modifie la condition portant sur la connexité de f_o (VI prop. 4.1.).

Dans la recherche de groupes $\pi_k(\mathrm{Hom}(V^n,M^m), P\ell, f_o)$ non triviaux, il était naturel de regarder tout d'abord les groupes correspondant à des valeurs de k, m, n situées juste après le domaine stable, c'est-à-dire telles que $k = m-2n$. Cette seconde étape dans l'étude des groupes $\pi_k(\mathrm{Hom}(V^n,M^m), P\ell, f_o)$ généralise des théorèmes de H. Whitney [20] et W.T. Wu [22] sur la suppression des points doubles isolés. J'ai montré en particulier (cf. VI prop. 2.1. cor.) que les groupes considérés étaient pour $k \geqslant 1$, $m \geqslant n+3$, somme directe de groupes isomorphes au groupe $\mathbb{Z}$ des entiers ou au groupe $\mathbb{Z}_2$ des entiers modulo 2. Les résultats de cette étape ont été annoncés dans [3] et légèrement améliorés par la suite (cf. VI.2.).

La comparaison des deux étapes précédentes m'a suggéré que les groupes $\pi_k(\mathrm{Hom}(V^n,M^m), P\ell, f_o)$ avaient un lien avec certains <u>groupes de bordisme normal</u>. Au chapitre I, on définit et étudie ces groupes de bordisme normal, groupes qui ont des propriétés analogues aux groupes d'homologie. Au chapitre II, on définit et étudie les groupes de cobordisme normal, notion duale à la précédente.

Au chapitre IV, on établit le lien entre les groupes $\pi_k(\mathrm{Hom}(V^n,M^m), P\ell, f_o)$ et les groupes de bordisme normal. Par exemple, <u>pour</u> $M^m = \mathbb{R}^m$, <u>on définit pour tout entier</u> $j \geqslant 0$ <u>un homomorphisme</u> (<u>application pointée si</u> $j = 0$)

$$\alpha_{j+1} : \pi_j(\mathcal{P}_\ell(V^n,\mathbb{R}^m), f_o) \longrightarrow \Omega_{2n-m+j+1}(W^{2n},\partial W^{2n} ; m\omega \oplus \nu W)$$

où W^{2n} est une variété compacte définie en IV.1., νW son fibré normal stable et ω^1 un fibré vectoriel de base W^{2n} défini en IV.1. <u>On définit</u> (<u>même pour</u> $m < n$) <u>un élément</u> $\alpha_o(V^n,m) \in \Omega_{2n-m}(W^{2n},\partial W^{2n} ; m\omega \oplus \nu W)$ <u>dont l'ordre est une puissance de</u> 2. On a une dualité de Poincaré

$$\Omega_{2n-m+j+1}(W^{2n},\partial W^{2n} ; m\omega \oplus \nu W) \approx \Omega^{m-j-1}(W^{2n} ; m\omega) .$$

α_o et α_{j+1} sont définis à partir des notions de <u>familles excellentes d'applications</u> et de <u>familles parfaites d'applications</u>, notions introduites au cha-

On démontre alors au chapitre V que α_{j+1} est un isomorphisme pour $0 \leqslant j \leqslant 2m-3n-4$ et que $\alpha_o(V^n,m) = 0$ si et seulement s'il existe un plongement de V^n dans $\mathbb{R}^m$, moyennant la condition $2m-3n-3 \geqslant 0$. On utilise pour cela une méthode généralisant à plusieurs paramètres les méthodes utilisées par A. Haefliger dans [7] et [10]. Cette méthode consiste à utiliser un modèle de déformation (cf. V.2.) qui est une extension du modèle d'élimination des points doubles de Whitney.

Pour une variété M^m quelconque, on obtient des résultats analogues (annoncés dans [4], cf. IV.3.) dans le domaine $0 \leqslant k \leqslant 2m-3n-3$ appelé <u>domaine métastable</u>. Ce domaine contient le domaine stable $0 \leqslant k \leqslant m-2n-1$ (sauf le cas $k = 0$, $n = 0$, $m = 1$).

L'étude des groupes $\pi_k(\mathrm{Hom}(V^n,M^m), P\ell, f_o)$ dans le domaine métastable est ainsi ramenée à l'étude de certains groupes de bordisme normal ou de cobordisme normal. Cela permet au chapitre VI de déterminer certains groupes $\pi_k(\mathrm{Hom}(V^n,M^m), P\ell, f_o)$ et de retrouver les résultats des deux premières étapes. Au chapitre VII on étend les résultats obtenus au cas où V^n est une variété à bord et aux espaces d'immersions.

En terminant cette introduction, je tiens à remercier Monsieur Jean Cerf de m'avoir initié à la Topologie Différentielle et de m'avoir soutenu par ses encouragements dans l'élaboration de cette thèse dont il a été le directeur. Je voudrais aussi remercier Monsieur André Haefliger pour les conversations que j'ai pu avoir avec lui, et pour les conseils qu'il m'a donnés. Sans certains de ses travaux, cette thèse ne serait jamais parue.

Qu'il me soit permis d'associer à ces remerciements mon professeur Monsieur Henri Cartan qui a accepté de présider le jury de cette thèse, et Monsieur Michel Demazure qui a bien voulu faire partie du jury.

Je remercie enfin Madame Parvan du soin qu'elle a apporté en dactylographiant ce mémoire.

Jean-Pierre Dax

Centre d'Orsay.

Université Paris-Sud - Mars 1971

CHAPITRE I : BORDISME NORMAL.

Etant donnée une paire topologique (X,A) et un fibré vectoriel [1] stable ξ de base X, on définit au §1 pour tout entier $i \geqslant 0$ le groupe de bordisme normal de dimension i de la paire (X,A) à coefficients dans ξ, noté $\Omega_i(X,A ; \xi)$. On donne au §2 une interprétation homotopique de ce groupe. Plus précisément, on montre que ce groupe est isomorphe au groupe d'homotopie stable $\pi_{N+i}(T(\xi^N), T(\xi^N|A))$, $N \geqslant i+2$; on a noté $T(\xi^N)$ et $T(\xi^N|A)$ les espaces de Thom associés aux fibrés vectoriels ξ^N et $\xi^N|A$. On montre ensuite que les groupes $\Omega_i(X,A ; \xi)$ ont des propriétés du type homologique. En particulier, il existe un isomorphisme du type Thom-Gysin.

1.- Définition des groupes de bordisme normal.

1.1. Soient (X,A) une paire d'espaces topologiques $(A \subset X)$ et ξ^N un fibré vectoriel réel localement trivial de base X et de rang N. On se donne un entier $i \geqslant 0$ et l'on suppose $N \geqslant i+2$. On se propose de définir un groupe abélien $\Omega_i(X,A ; \xi^N)$.

On appelle application normale dans $(X,A ; \xi^N)$ un triple (Δ,b,B) dans lequel

(a) $(\Delta,\partial\Delta)$ est une sous-variété de classe C^∞ compacte du disque D^{N+i}, de dimension i, telle que $\Delta \pitchfork S^{N+i-1} = \partial\Delta$;

(b) $b : (\Delta,\partial\Delta) \to (X,A)$ est une application continue ;

---

(1) Tous les fibrés vectoriels considérés dans ce travail sont supposés réels et localement triviaux.

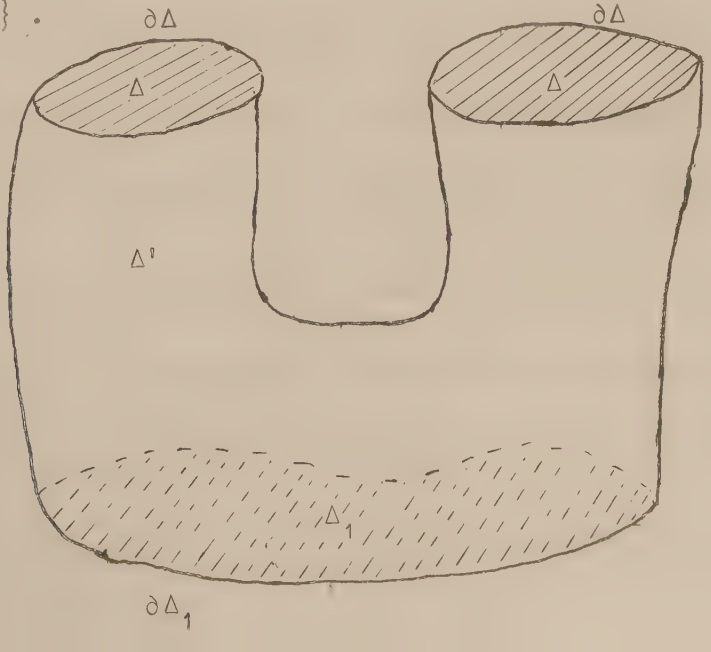
(c) $B : \nu^N(\Delta) \to \xi^N$ est un morphisme strict de fibrés vectoriels au-dessus de b [i.e. un morphisme de fibrés vectoriels qui soit un isomorphisme sur chaque fibre], où $\nu^N(\Delta)$ est un fibré normal à $(\Delta,\partial\Delta) \subset (D^{N+i}, S^{N+i-1})$.

Un <u>cobordisme normal</u> entre deux applications normales (Δ,b,B) et (Δ_1,b_1,B_1) dans $(X,A ; \xi^N)$, où Δ et Δ_1 sont deux variétés de dimension i, est un triple (Δ',b',B') dans lequel

(a') $(\Delta',\partial\Delta')$ est une sous-variété de classe C^∞ compacte de $(D^{N+i} \times I, \partial(D^{N+i} \times I))$, de dimension $i+1$, coupant $\partial(D^{N+i} \times I)$ et $S^{N+i-1} \times \{0,1\}$ transversalement et telle que $\Delta' \pitchfork (D^{N+i} \times \{0\}) = \Delta \times \{0\}$, $\Delta' \pitchfork (D^{N+i} \times \{1\}) = \Delta_1 \times \{1\}$; on note $U = \partial\Delta' \pitchfork S^{N+i-1} \times I$, variété compacte de bord $\partial U = \partial\Delta \amalg \partial\Delta_1$ (voir figure 1) ;

(b') $b' : (\Delta',U) \to (X,A)$ est une application continue telle que $b'|\Delta = b$, $b'|\Delta_1 = b_1$;

(c') $B' : \nu^N(\Delta') \to \xi^N$ est un morphisme strict au-dessus de b' tel que $B'|\nu(\Delta) \times \{0\} = B$, $B'|\nu(\Delta_1) \times \{1\} = B_1$. On a noté $\nu^N(\Delta')$ un fibré normal à $\Delta' \subset D^{N+i} \times I$ tel que $\nu^N(\Delta')|\Delta \times \{0\} = \nu^N(\Delta) \times \{0\}$, $\nu^N(\Delta')|\Delta_1 \times \{1\} = \nu^N(\Delta_1) \times \{1\}$.



On dit que deux applications normales dans $(X,A\ ;\ \xi^N)$ sont <u>bordantes</u> s'il existe un cobordisme normal entre elles. On montre qu'il s'agit d'une relation d'équivalence. On note $\Omega_i(X,A\ ;\ \xi^N)$ l'ensemble quotient et $[\Delta,b,B]$ ou plus brièvement $[B]$ la classe de bordisme normal de (Δ,b,B).

On met sur $\Omega_i(X,A\ ;\ \xi^N)$ une structure de groupe abélien au moyen de <u>l'union disjointe</u> :

$$[\Delta^i,b,B] + [\Delta_1^i,b_1,B_1] = [\Delta^i \amalg \Delta_1^i,\ b \amalg b_1,\ B \amalg B_1]\ ,$$

lorsque $\Delta^i \cap \Delta_1^i = \emptyset$. L'hypothèse $N \geqslant i+2$ intervient ici. L'élément neutre s'obtient en prenant $\Delta = \emptyset$. Une application normale dont la classe de bordisme normal est nulle s'appelle un <u>bord</u>. Si $u : \mathbb{R}^{N+i} \to \mathbb{R}^{N+i}$ est un isomorphisme linéaire, $[u^{-1}(\Delta),\ b \circ u,\ B \circ u_*]$ est égal à $[\Delta,b,B]$ ou à son opposé suivant que le déterminant de u est positif ou non.

<u>1.2</u>. Comme $D^{N+i} \subset D^{N+i+1}$, toute sous-variété Δ de D^{N+i} telle que $\Delta \pitchfork S^{N+i-1} = \partial\Delta$ est une sous-variété de D^{N+i+1} telle que $\Delta \pitchfork S^{N+i} = \partial\Delta$. De plus on peut prendre $\nu^{N+1}(\Delta) = \nu^N(\Delta) \times \mathbb{R}$. De sorte que l'on peut définir un homomorphisme suspension

$$S : \Omega_i(X,A\ ;\ \xi^N) \longrightarrow \Omega_i(X,A\ ;\ \xi^N \times \mathbb{R})$$

par $S([\Delta,b,B]) = [\Delta,b,B \times \mathrm{id}(\mathbb{R})]$. En utilisant l'hypothèse $N \geqslant i+2$, on montre que S est un isomorphisme. Il en résulte que le groupe abélien $\Omega_i(X,A\ ;\ \xi^N)$ ne dépend que de la classe de stabilité ξ du fibré vectoriel ξ^N

Par suite si ξ est un fibré vectoriel stable de base X et A un sous-espace de X , on définit pour tout entier $i \geqslant 0$ un groupe abélien $\Omega_i(X,A\ ;\ \xi) = \Omega_i(X,A\ ;\ \xi^N)$ où ξ^N est un représentant de rang $N \geqslant i+2$ de ξ ,

$\xi^{N+N'} = \xi^N \times \mathbb{R}^{N'}$.

$\Omega_i(X,A\ ;\ \xi)$ est le groupe de bordisme normal de dimension i de la paire topologique (X,A) à coefficients dans le fibré vectoriel stable ξ de base X .

On note $\Omega_*(X,A\ ;\ \xi) = \bigoplus_{i\geqslant 0} \Omega_i(X,A\ ;\ \xi)$, $\Omega_i(X\ ;\ \xi) = \Omega_i(X,\emptyset\ ;\ \xi)$ et $\Omega_*(X\ ;\ \xi) = \Omega_*(X,\emptyset\ ;\ \xi)$.

Soient (Y,B) une paire topologique et η un fibré vectoriel stable de base Y . Soient $f : (X,A) \to (Y,B)$ une application continue et $F : \xi^N \to \eta^N$ un morphisme strict de fibrés vectoriels au-dessus de f . On leur associe un homomorphisme $F_* : \Omega_i(X,A\ ;\ \xi) \to \Omega_i(Y,B\ ;\ \eta)$ défini par $f_*([\Delta,b,B]) = [\Delta,f \circ b,F \circ B]$. Ω_* est ainsi un foncteur covariant.

2.- Isomorphisme de Thom-Pontrjagin.

Une méthode utilisée par Thom [19] et Pontrjagin [15] va nous permettre de montrer que le groupe de bordisme normal $\Omega_i(X,A\ ;\ \xi)$ est isomorphe au groupe d'homotopie stable $\pi_{N+i}(T(\xi^N),\ T(\xi^N|A))$ pour $N \geqslant i+2$.

Soit $[\Delta,b,B] \in \Omega_i(X,A\ ;\ \xi)$. Le morphisme strict $B : \nu^N(\Delta) \to \xi^N$, $N \geqslant i+2$, induit une application continue entre espaces de Thom, $T(B) : T(\nu^N\Delta) \to T(\xi^N)$. L'espace du fibré $\nu^N\Delta$ peut s'identifier à un voisinage tubulaire de $(\Delta,\partial\Delta) \subset (D^{N+i},\ S^{N+i-1})$. En collapsant le complémentaire de ce voisinage, on obtient une application $(D^{N+i},\ S^{N+i-1}) \to (T(\nu^N\Delta),\ T(\nu^N\Delta|\partial\Delta))$. En composant cette application avec $T(B)$, on obtient une application

$$(D^{N+i},\ S^{N+i-1}) \longrightarrow (T(\xi^N),\ T(\xi^N|A))$$

qui représente un élément de $\pi_{N+i}(T(\xi^N), T(\xi^N|A))$. On montre que cet élément ne dépend que de la classe de bordisme normal de l'application normale (Δ,b,B), et l'on a ainsi défini un homomorphisme

$$\tau : \Omega_i(X,A ; \xi) \longrightarrow \pi_{N+i}(T(\xi^N), T(\xi^N|A)) \quad \text{pour} \quad N \geqslant i+2 .$$

On définit maintenant un homomorphisme

$$\rho : \pi_{N+i}(T(\xi^N), T(\xi^N|A)) \longrightarrow \Omega_i(X,A ; \xi) \quad \text{pour} \quad N \geqslant i+2 .$$

Un élément de $\pi_{N+i}(T(\xi^N), T(\xi^N|A))$ est représenté par une application continue

$$h : (D^{N+i}, S^{N+i-1}) \longrightarrow (T(\xi^N), T(\xi^N|A)) .$$

X s'identifie à la section nulle de ξ^N et par suite à un sous-espace de $T(\xi^N)$. De même A s'identifie à un sous-espace de $T(\xi^N|A)$. On peut supposer l'application h "transversale" à X et l'application $h|S^{N+i-1}$ "transversale" à A. La paire $(\Delta,\partial\Delta) = (h^{-1}(X), h^{-1}(A))$ est alors une sous-variété compacte de D^{N+i} telle que $\Delta \pitchfork S^{N+i-1} = \partial\Delta$. On pose $b = h|\Delta : (\Delta,\partial\Delta) \to (X,A)$. L'application h est transversale à X. Elle induit donc un morphisme strict $B : \nu^N(\Delta) \to \xi^N$. On montre que la classe de bordisme normal de l'application normale (Δ,b,B) ne dépend que de la classe d'homotopie de h et l'on pose $\rho([h]) = [\Delta,b,B]$.

Il résulte des définitions de τ et ρ que $\tau \circ \rho = id$, $\rho \circ \tau = id$, de sorte que τ est un isomorphisme et $\rho = \tau^{-1}$. τ est <u>l'isomorphisme de Thom-Pontrjagin</u>.

En particulier, en prenant $(X,A) = (\{*\}, \emptyset)$, on montre que $\Omega_i(* ; 0) \approx \pi_i^s$ où $\pi_i^s \approx \pi_{N+i}(S^N)$, $N \geqslant i+2$, est le i-stem des groupes d'homotopie stables des sphères.

3.- Propriétés du type homologique.

Notons $(e_1, e_2, \ldots, e_{N+i})$ la base canonique de $\mathbb{R}^{N+i}$. L'orientation considérée sur S^{N+i-1} sera l'orientation définie au point e_1 par le repère $(e_2, e_3, \ldots, e_{N+i})$. On identifie $S^{N+i-1} - \{e_1\}$ à $\overset{\circ}{D}{}^{N+i-1}$ par un difféomorphisme compatible avec les orientations.

Soit (Δ, b, B) une application normale dans $(X, A ; \xi)$. $\partial\Delta$ est une sous-variété compacte de S^{N+i-1}. Si $e_1 \notin \partial\Delta$, vue l'identification précédente, on peut considérer $\partial\Delta$ comme une sous-variété compacte sans bord de $\overset{\circ}{D}{}^{N+i-1}$. De sorte que l'on peut définir un homomorphisme bord

$$\partial : \Omega_i(X, A ; \xi) \longrightarrow \Omega_{i-1}(A ; \xi|A)$$

par $\partial([\Delta, b, B]) = [\partial\Delta, b|\partial\Delta, B|\nu(\partial\Delta)]$. ∂ est un morphisme de foncteurs.

Proposition 3.1.- On considère les inclusions $i : A \to X$ et $j : (X, \emptyset) \to (X, A)$. La suite d'homomorphismes

$$\ldots \to \Omega_i(A ; \xi|A) \xrightarrow{i_*} \Omega_i(X ; \xi) \xrightarrow{j_*} \Omega_i(X, A ; \xi) \xrightarrow{\partial} \Omega_{i-1}(A ; \xi|A) \to \ldots$$

est exacte. On l'appelle suite exacte de bordisme normal du couple $(X, A ; \xi)$.

L'assertion est évidente sauf l'inclusion $\operatorname{Ker} \partial \subset \operatorname{Im} j_*$. Démontrons auparavant le lemme suivant :

lemme - Soit (Δ^i, b, B) une application normale dans $(X, A ; \xi)$. Soit Δ_1 une sous-variété compacte de codimension 0 de Δ, ayant éventuellement des angles. On suppose que $b^{-1}(A)$ contienne $\Delta - \overset{\circ}{\Delta}_1$. Alors

$[\Delta, b, B] = [\Delta_1, b|\Delta_1, B|\nu(\Delta_1)] \in \Omega_i(X, A ; \xi)$.

Démonstration du lemme. Moyennant certaines considérations sur les angles, un cobordisme normal entre les applications normales (Δ, b, B) et

$(\Delta_1, b|\Delta_1, B|\nu(\Delta_1))$ est donné par (Δ', b', B') où $\Delta' = \Delta \times I$, $b' = b \circ pr_1$, $B' = B \circ pr_1$. On identifie Δ à $\Delta \times \{0\}$ et Δ_1 à $\Delta_1 \times \{1\}$.

Démonstration de $\mathrm{Ker}\,\partial \subset \mathrm{Im}\, j_*$. Soit $[\Delta, b, B] \in \Omega_i(X, A ; \xi)$. Dire que $\partial([\Delta, b, B]) = 0$, c'est dire qu'il existe une sous-variété compacte U de D^{N+i} telle que $\partial\Delta = U \cap S^{N+i-1}$, une application continue $c : U \to A$, et un morphisme strict $C : \nu(U) \to \xi|A$ au-dessus de c tels que $c|\partial\Delta = b|\partial\Delta$, $C|\nu(\partial\Delta) = B|\nu(\partial\Delta)$. Considérons la variété recollée $\Delta' = \Delta \underset{\partial\Delta}{\cup} U$; c'est une variété compacte sans bord. Notons $b' : \Delta' \to X$ l'application $b \cup c$. Le morphisme strict C permet de prolonger le morphisme strict B en un morphisme strict $B' : \nu(\Delta') \to \xi$ au-dessus de b' . D'après le lemme, on a $[\Delta', b', B'] = [\Delta, b, B]$ dans $\Omega_i(X, A ; \xi)$.

Proposition 3.2.- Soient ξ et η deux fibrés vectoriels stables de bases X et Y . Soit $F : \xi^N \times I \to \eta^N$ un morphisme strict. On note F_0 et F_1 les restrictions de F à $\xi^N \times \{0\}$ et $\xi^N \times \{1\}$. Alors les homomorphismes $(F_0)_*$ et $(F_1)_*$ de $\Omega_*(X ; \xi)$ dans $\Omega_*(Y ; \eta)$ sont égaux.

Démonstration. Notons f, f_0 et f_1 les projections de F, F_0 et F_1 sur les bases. Soit $[\Delta, b, B]$ un élément de $\Omega_*(X ; \xi)$. Un cobordisme normal entre $(\Delta, f_0 \circ b, F_0 \circ B)$ et $(\Delta, f_1 \circ b, F_1 \circ B)$ est donné par $(\Delta \times I, f \circ (b \times \mathrm{id}(I)), F \circ (B \times \mathrm{id}(I))$.

Proposition 3.3.- (excision). Soit U un sous-espace de A tel que $\overline{U} \subset \overset{\circ}{A}$. Alors l'inclusion $i : (X-U, A-U) \to (X, A)$ induit un isomorphisme $i_* : \Omega_*(X-U, A-U ; \xi|X-U) \to \Omega_*(X, A ; \xi)$.

Démonstration. Montrons la surjectivité de i_* , la démonstration de

l'injectivité est analogue. Soit $[\Delta,b,B]$ un élément de $\Omega_*(X,A\ ;\ \xi)$. Il existe une fonction différentiable $\varphi : \Delta \to [0,1]$ égale à 0 sur $\bar{b}^{-1}(X-\overset{\circ}{A})$, à 1 sur $\bar{b}^{-1}(\bar{U})$, et qui est transversale à la valeur $1/2$ ainsi que $\varphi|\partial\Delta$. Considérons la variété $\Delta_1 = \bar{\varphi}^{-1}([0,1/2])$. D'après le lemme les applications normales (Δ,b,B) et $(\Delta_1,\ b|\Delta_1,\ B|\nu(\Delta_1))$ représentent le même élément de $\Omega_*(X,A\ ;\ \xi)$. Mais $(\Delta_1,\ b|\Delta_1,\ B|\nu(\Delta_1))$ représente aussi un élément de $\Omega_*(X-U,\ A-U\ ;\ \xi|X-U)$.

4.- Conséquences des propriétés homologiques.

4.1. On suppose que l'espace X est pointé ; notons $*$ le point de base. On définit alors des groupes réduits $\tilde{\Omega}_i(X\ ;\ \xi)$ par $\tilde{\Omega}_i(X\ ;\ \xi) = \Omega_i(X,*\ ;\ \xi)$. D'après la suite exacte de bordisme normal du couple $(X,*\ ;\ \xi)$, ces groupes réduits entrent dans la suite exacte

$$\ldots \to \pi_i^S \longrightarrow \Omega_i(X\ ;\ \xi) \longrightarrow \tilde{\Omega}_i(X\ ;\ \xi) \to \ldots$$

Si le fibré ξ est trivial, le morphisme inclusion $\xi^N|\{*\} \to \xi^N$ admet une rétraction. Dans ce cas la suite exacte se scinde en suites exactes courtes

$$0 \longrightarrow \pi_i^S \longrightarrow \Omega_i(X\ ;\ 0) \longrightarrow \tilde{\Omega}_i(X\ ;\ 0) \longrightarrow 0$$

et l'on a $\Omega_i(X\ ;\ 0) \approx \pi_i^S \oplus \tilde{\Omega}_i(X\ ;\ 0)$. On a noté 0 la classe de stabilité du fibré trivial ξ.

4.2. Pour chaque triple $X \supset A \supset B$ et chaque fibré vectoriel ξ de base X, on a une suite exacte d'homomorphismes

$$\ldots \to \Omega_i(A,B\ ;\ \xi|A) \to \Omega_i(X,B\ ;\ \xi) \to \Omega_i(X,A\ ;\ \xi) \to \Omega_{i-1}(A,B\ ;\ \xi|A) \to \ldots$$

En prenant $B = \{*\}$, $* \in A$ on montre que pour tout couple (X,A), on a la suite exacte

$$\ldots \to \tilde{\Omega}_i(A\ ;\ \xi|A) \to \tilde{\Omega}_i(X\ ;\ \xi) \to \Omega_i(X,A\ ;\ \xi) \to \tilde{\Omega}_{i-1}(A\ ;\ \xi|A) \to \ldots$$

4.3. On note SX la suspension usuelle de X, à savoir l'espace $X \times I$ avec $X \times 0$ et $X \times 1$ identifiés chacun à un point. On identifie X avec $X \times 1/2$. On considère les cônes

$$C_- = X \times [0,1/2]_{/X\times 0} \quad , \quad C_+ = X \times [1/2,1]_{/X\times 1}$$

Soit ξ un fibré vectoriel stable de base SX. On a alors des isomorphismes

$$\tilde{\Omega}_i(SX\ ;\ \xi) \approx \Omega_i(SX,\ C_+\ ;\ \xi) \approx \Omega_i(C_-,\ X\ ;\ \xi|C_-) \approx \tilde{\Omega}_{i-1}(X\ ;\ \xi|X)\ .$$

On a donc :

Proposition 4.3.1.- Pour tout fibré vectoriel ξ de base la sphère S^n, on a $\tilde{\Omega}_i(S^n\ ;\ \xi) \approx \pi^s_{i-n}$.

5.- Relations avec les groupes d'homologie.

Etant donné un fibré vectoriel ξ de base X, on note $\mathbb{Z}(\xi)$ le système local de base X des entiers tordus par les orientations des fibres du fibré ξ. Si ξ et η sont deux fibrés vectoriels de base X, on a $\mathbb{Z}(\xi \oplus_X \eta) \approx \mathbb{Z}(\xi) \otimes_X \mathbb{Z}(\eta)$. Si l'on note $n\xi$ la somme directe sur X de n exemplaires du fibré vectoriel ξ et $\mathbb{Z}(\xi)^n$ le produit tensoriel sur X de n exemplaires du système local $\mathbb{Z}(\xi)$, on a $\mathbb{Z}(n\xi) \approx \mathbb{Z}(\xi)^n$. $\mathbb{Q}$ désignant le corps des rationnels, on note $\mathbb{Q}(\xi) = \mathbb{Z}(\xi) \otimes \mathbb{Q}$.

On définit un homomorphisme $\mu : \Omega_i(X,A\ ;\ \xi) \to H_i(X,A\ ;\ \mathbb{Z}(\xi))$ par le diagramme commutatif suivant $(N \geqslant i+2)$:

$$\begin{array}{ccc}
\Omega_i(X,A\ ;\ \xi) & \xrightarrow{\ \mu\ } & H_i(X,A\ ;\ \mathbb{Z}(\xi)) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \tau}\ \approx & & \Big\uparrow{\scriptstyle \Phi}\ \approx \\
\pi_{N+i}(T(\xi^N), T(\xi^N|A)) & \xrightarrow[\text{(Hurewicz)}]{\ h\ } & H_{N+i}(T(\xi^N), T(\xi^N|A))
\end{array}$$

(Thom-Pontrjagin) (Thom-Gysin)

Le diagramme montre que μ est à un isomorphisme près un homomorphisme de Hurewicz. D'après le théorème de Hurewicz relatif, on a donc :

Proposition 5.1.- Si $H_i(X,A ; \mathbb{Z}(\xi)) = 0$ pour $i < n$, alors $\Omega_i(X,A ; \xi) = 0$ pour $i < n$, et

(a) $\mu : \Omega_n(X,A ; \xi) \longrightarrow H_n(X,A ; \mathbb{Z}(\xi))$ est un isomorphisme ;

(b) $\mu : \Omega_{n+1}(X,A ; \xi) \longrightarrow H_{n+1}(X,A ; \mathbb{Z}(\xi))$ est un épimorphisme.

Le théorème de Hurewicz relatif généralisé aux classes de Serre (cf. [17], 9.6.21) permet d'étendre la proposition précédente.

Corollaire. $\mu : \Omega_0(X,A ; \xi) \longrightarrow H_0(X,A ; \mathbb{Z}(\xi))$ est un isomorphisme ;

$\mu : \Omega_1(X,A ; \xi) \longrightarrow H_1(X,A ; \mathbb{Z}(\xi))$ est un épimorphisme.

Par suite le groupe $\Omega_0(X,A ; \xi)$ est isomorphe à la somme directe des groupes $\mathbb{Z}_{m(c)}$, $c \in \pi_0(X,A) - \{*\}$, avec $m(c) = 0$ ou 2 suivant que la restriction de $\mathbb{Z}(\xi)$ à la composante connexe par arcs c est un système local trivial ou non [on a noté $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_0$]. Autrement dit, $m(c) = 0$ ou 2 suivant que la restriction du fibré vectoriel ξ à la composante connexe par arcs de c est un fibré vectoriel orientable ou non. Ce résultat se montre aussi directement à partir de la définition de $\Omega_0(X,A ; \xi)$.

Soit Δ une variété de classe C^∞ compacte avec ou sans bord, de dimension i. Le groupe $\Omega_i(\Delta,\partial\Delta ; \nu(\Delta))$, où $\nu(\Delta)$ est le fibré normal stable à Δ, contient l'élément canonique $[\Delta, id(\Delta), id(\nu\Delta)]$. Cet élément s'appelle la classe fondamentale de bordisme normal de la variété Δ^i. Notons $[\Delta] = \mu([\Delta, id(\Delta), id(\nu\Delta)]) \in H_i(\Delta,\partial\Delta ; \mathbb{Z}(\nu\Delta))$. $[\Delta]$ s'appelle la classe fondamentale d'homologie de la variété Δ^i.

Si (Δ,b,B) est une application normale dans $(X,A\ ;\ \xi)$, on peut lui associer le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Omega_i(\Delta,\partial\Delta\ ;\ \nu\Delta) & \xrightarrow{\mu} & H_i(\Delta,\partial\Delta\ ;\ \mathbb{Z}(\nu\Delta)) \\ \Big\downarrow B_* & & \Big\downarrow B_* \\ \Omega_i(X,A\ ;\ \xi) & \xrightarrow{\mu} & H_i(X,A\ ;\ \mathbb{Z}(\xi)) \end{array}$$

de sorte que l'on a $\mu \circ B_*([\mathrm{id}(\nu\Delta)]) = B_* \circ \mu([\mathrm{id}(\nu\Delta)])$, soit $\mu([\Delta,b,B]) = B_*([\Delta])$.

Le groupe $\pi_{N+i}(T(\xi^N),\ T(\xi^N|A))$ est stable puisque $N \geqslant i+2$. Par suite, si on tensorise l'homomorphisme h de Hurewicz avec les rationnels $\mathbb{Q}$, on obtient un isomorphisme. On a donc :

<u>Proposition</u> 5.2.- <u>L'homomorphisme</u> $\mu \otimes \mathrm{id}(\mathbb{Q}) : \Omega_i(X,A\ ;\ \xi) \otimes \mathbb{Q} \to H_i(X,A\ ;\ \mathbb{Q}(\xi))$ <u>est un isomorphisme</u>.

6.- <u>Isomorphisme de Thom-Gysin</u>.

Soit $\sigma = (E,X,\pi)$ un fibré vectoriel de rang s muni d'une structure euclidienne. On note $B(\sigma)$ et $S(\sigma)$ les fibrés associés, respectivement en boules et en sphères de rayon unité. Soit ξ un fibré vectoriel stable de base X .

On va tout d'abord définir un homomorphisme

$$\Phi : \Omega_i(B(\sigma),\ S(\sigma)\ ;\ \pi^*\,\xi) \longrightarrow \Omega_{i-s}(X\ ;\ \sigma \oplus \xi) .$$

Soit $[\Delta,b,B] \in \Omega_i(B(\sigma),\ S(\sigma)\ ;\ \pi^*\,\xi)$. On identifie X à la section nulle de σ . On suppose que l'application $b : (\Delta,\partial\Delta) \to (B(\sigma),\ S(\sigma))$ est transversale à $X \subset B(\sigma)$. L'espace $\Delta_1 = \bar{b}^{-1}(X)$ est alors une sous-variété de Δ de classe C^∞ compacte sans bord, de dimension $i-s$. L'application b induit un morphisme

strict $B_o : \nu(\Delta ; \Delta_1) \to \sigma$ au-dessus de $b|\Delta_1 : \Delta_1 \to X$, où $\nu(\Delta ; \Delta_1)$ est un fibré normal à Δ_1 dans Δ. Comme $\nu(\Delta_1) = \nu(\Delta ; \Delta_1) \oplus \nu(\Delta)|\Delta_1$, $(\Delta_1 , b|\Delta_1, B_o \oplus B|\Delta_1)$ représente un élément de $\Omega_{i-s}(X ; \sigma \oplus \xi)$. Cet élément ne dépend que de la classe $[\Delta,b,B]$ dont on est parti et l'on pose

$$\Phi([\Delta,b,B]) = [\Delta_1, b|\Delta_1, B_o \oplus B|\Delta_1] .$$

Définissons maintenant un homomorphisme

$$\Psi : \Omega_{i-s}(X ; \sigma \oplus \xi) \longrightarrow \Omega_i(B(\sigma), S(\sigma) ; \pi^* \xi) .$$

Soit $[\Delta_1,b_1,B_1] \in \Omega_{i-s}(X ; \sigma \oplus \xi)$. On pose $\Delta = b_1^*(B(\sigma))$, $b : b_1^*(B(\sigma)) \to B(\sigma)$. L'application normale $B_1 : \nu(\Delta_1) \to \sigma \oplus \xi$ induit un morphisme strict $\nu(\Delta)|\Delta_1 \to \xi$ que l'on prolonge en un morphisme strict $B : \nu(\Delta) \to \pi^* \xi$ au-dessus de b. La classe de bordisme normal $[\Delta,b,B]$ ne dépend que de la classe $[\Delta_1,b_1,B_1]$ dont on est parti et l'on pose $\Psi([\Delta_1,b_1,B_1]) = [\Delta,b,B]$.

Il résulte des définitions de Φ et Ψ que $\Phi \circ \Psi = id$, $\Psi \circ \Phi = id$ (on peut utiliser le lemme du §3). Par suite Φ est un isomorphisme et $\Psi = \Phi^{-1}$. Φ est l'isomorphisme de Thom-Gysin en bordisme normal.

En écrivant la suite exacte de bordisme normal de la paire $(B(\sigma), S(\sigma) ; \pi^* \xi)$ et en utilisant l'isomorphisme de Thom-Gysin, on obtient une suite exacte de Gysin

$$\ldots \to \Omega_i(S(\sigma) ; \pi^* \xi|S(\sigma)) \longrightarrow \Omega_i(X ; \xi) \longrightarrow \Omega_{i-s}(X ; \sigma \oplus \xi) \to \ldots$$

Si le fibré σ possède une section partout non nulle, le morphisme strict $\pi^* \xi|S(\sigma) \longrightarrow \xi$ possède une section. La suite exacte de Gysin se décompose alors en suites exactes courtes et l'on a

$$\Omega_i(S(\sigma) ; \pi^* \xi|S(\sigma)) \approx \Omega_i(X ; \xi) \oplus \Omega_{i-s+1}(X ; \sigma \oplus \xi) .$$

En appliquant ce qui précède au fibré produit $pr_1 : S^p \times \mathbb{R}^{q+1} \to S^p$, on obtient le corollaire suivant (où 0 désigne la classe de stabilité d'un fibré vectoriel trivial) :

Corollaire. $\Omega_i(S^p \times S^q ; 0) \approx \Omega_i(S^p ; 0) \oplus \Omega_{i-q}(S^p ; 0)$.

Rappelons que d'après 4.1. et 4.3., on a $\Omega_i(S^n ; 0) \approx \pi_i^s \oplus \pi_{i-n}^s$.

7.- Détermination de certains groupes de bordisme normal.

On se donne une paire topologique (X,A) et un fibré vectoriel stable ξ de base X.

Proposition 7.1.- Si $\pi_j(X,A) = 0$ pour $0 \leqslant j \leqslant c$ et tout point de base, alors $\Omega_i(X,A ; \xi) = 0$ pour $0 \leqslant i \leqslant c$ et tout fibré vectoriel ξ de base X.

Démonstration. Soit $[\Delta,b,B] \in \Omega_i(X,A ; \xi)$, $i \leqslant c$. Puisque $\pi_j(X,A) = 0$ pour $0 \leqslant j \leqslant c$ et tout point de base, il existe une homotopie $b' : \Delta \times I \to X$ telle que $b'|\Delta \times \{0\} = b$, $b'(\Delta \times \{1\} \cup \partial\Delta \times I) \subset A$. On prolonge B défini sur $\nu(\Delta) \times \{0\}$ en $B' : \nu(\Delta) \times I \to \xi$ au-dessus de b' . (Δ,b,B) borde $(\Delta \times I,b',B')$.

Corollaire. Si l'espace X est c-connexe, l'inclusion $\{*\} \to X$ induit un isomorphisme $\Omega_i(X ; \xi) \approx \pi_i^s$ pour $i \leqslant c-1$ et un épimorphisme $\pi_c^s \to \Omega_c(X ; \xi)$. Lorsque le fibré ξ est trivial, cet épimorphisme est un isomorphisme.

En effet, on a une suite exacte (4.1.) :

$$\cdots \to \pi_i^s \longrightarrow \Omega_i(X ; \xi) \longrightarrow \Omega_i(X,* ; \xi) \to \cdots$$

X est c-connexe, autrement dit $\pi_i(X,*) = 0$ pour $i \leqslant c$. La proposition 7.1. entraîne $\Omega_i(X,* ; \xi) = 0$ pour $i \leqslant c$, d'où le corollaire. Lorsque ξ est trivial, on sait (4.1.) que l'homomorphisme $\pi_i^s \to \Omega_i(X ; \xi)$ est injectif.

Remarque. Lorsque X est c-connexe, l'homomorphisme $\pi_c^s \to \Omega_c(X ; \xi)$ n'est pas toujours injectif. Par exemple si X est connexe par arcs et si le fibré ξ n'est pas orientable, on a $\Omega_o(X ; \xi) \approx \mathbb{Z}_2$ (cf. 5.1. cor.) alors que $\pi_o^s \approx \mathbb{Z}$.

La proposition suivante est un raffinement de la proposition 7.1..

Proposition 7.2.- Soit $[\Delta^1, b, B]$ un élément de $\Omega_i(X, A ; \xi)$. On suppose que $\Delta^i = \Delta_1^i \underset{\varphi}{\cup} (D^{i-j} \times D^j)$ où φ est l'application d'attachement d'une anse d'indice $i-j$, $0 \leqslant j \leqslant i$. Alors, si $\pi_j(X, A) = 0$ pour tout point de base, il existe une application normale (Δ_1, b_1, B_1) dans $(X, A ; \xi)$ telle que $[\Delta, b, B] = [\Delta_1, b_1, B_1]$ dans $\Omega_i(X, A ; \xi)$.

Démonstration. Puisque $\pi_j(X, A) = 0$ pour tout point de base, l'application $b : (\Delta, \partial\Delta) \to (X, A)$ est homotope à une application $(\Delta, \partial\Delta \underset{\varphi}{\cup} (D^{i-j} \times D^j)) \to (X, A)$. On utilise alors le lemme du §3.

Corollaire. Si $\pi_j(X, A) = 0$ pour $0 \leqslant j \leqslant i-1$ et tout point de base, tout élément de $\Omega_i(X, A ; \xi)$ est somme d'éléments de la forme $[D^i, b, B]$ où D^i est le disque de dimension i . Si de plus A est connexe par arcs, $i \geqslant 1$, tout élément de $\Omega_i(X, A ; \xi)$ est de la forme $[D^i, b, B]$.

Notons $\mathbb{P}^n$ l'espace projectif réel de dimension n et λ_n le 1-fibré vectoriel canonique de base $\mathbb{P}^n$. Soit k un entier $\geqslant 0$. D'après l'isomorphisme de Thom-Pontrjagin, le groupe $\Omega_i(\mathbb{P}^n ; k\lambda_n)$ est isomorphe au groupe $\pi_{i+k}(T(k\lambda_n))$ pour $i \leqslant k-2$. Ces groupes sont aussi isomorphes au groupe $\pi_{i+k}(V_{n+k+1, n+1})$ pour $i \leqslant k-2$, où $V_{n+k+1, n+1}$ est la variété de Stiefel

des $(n+1)$-repères de $\mathbb{R}^{n+k+1}$ [cf. VII 1.4. ou encore Husemoller [12] 15.1.7. et 15.9.2.]. On a donc :

Proposition 7.3. On a un isomorphisme $\Omega_i(\mathbb{P}^n ; k\lambda_n) \approx \pi_{i+k}(V_{n+k+1,n+1})$ pour $i \leqslant k-2$.

8.- Revêtements à deux feuillets.

Soit $\pi : \tilde{X} \to X$ un revêtement à deux feuillets. On peut lui associer l'involution σ de $\tilde{X}$ qui permute deux points ayant même image par π . Soient A un sous-espace de X , $\tilde{A} = \pi^{-1}(A)$ et ξ un fibré vectoriel stable de base X . L'involution σ de $\tilde{X}$ induit une involution Σ de $\pi^* \xi$. On note $[\Omega_i(\tilde{X},\tilde{A} ; \pi^* \xi)]^\sigma$ le sous-groupe de $\Omega_i(\tilde{X},\tilde{A} ; \pi^* \xi)$ formé des éléments invariants par Σ_* .

Proposition 8.1.- L'homomorphisme $\pi_* : [\Omega_i(\tilde{X},\tilde{A} ; \pi^* \xi)]^\sigma \to \Omega_i(X,A ; \xi)$ est un isomorphisme modulo la classe de Serre des 2-groupes. Le noyau est formé d'éléments d'ordre 2.

Avant de démontrer la proposition, on définit un homomorphisme $s : \Omega_i(X,A ; \xi) \to [\Omega_i(\tilde{X},\tilde{A} ; \pi^* \xi)]^\sigma$ comme suit. Si (Δ,b,B) est une application normale dans $(X,A ; \xi)$, on considère l'image réciproque de $\tilde{X}$ par b :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\Delta} & \xrightarrow{c} & \tilde{X} \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ \Delta & \xrightarrow{b} & X \end{array}$$

$\tilde{\Delta}$ est un revêtement d'ordre deux de Δ , de sorte que l'on a un morphisme strict naturel $H : \nu(\tilde{\Delta}) \to \nu(\Delta)$. On pose $s([\Delta,b,B]) = [\tilde{\Delta}, c, B \circ H]$.

Démonstration. Soit $[\Delta,b,B] \in \Omega_i(\tilde{X},\tilde{A} ; \pi^* \xi)$. On a

$s \circ \pi_*([\Delta,b,B]) = [\Delta \amalg \Delta,\ b \amalg (\sigma \circ b),\ B \amalg (\Sigma \circ B)]$. Par suite, si $[\Delta,b,B]$ est invariant par Σ_*, on a $s \circ \pi_*([\Delta,b,B]) = 2[\Delta,b,B]$. En particulier le noyau de $\pi_* : [\Omega_i(\tilde{X},\tilde{A} ; \pi^* \xi)]^\sigma \to \Omega_i(X,A ; \xi)$ est formé d'éléments d'ordre 2.

Lorsque le revêtement $\pi : \tilde{X} \to X$ est trivial, $\pi_* \circ s$ est la multiplication par 2. Il en est ainsi pour $(X,A) = (D^n, S^{n-1})$. Nous allons montrer que $\pi_* \circ s : \Omega_i(X,A ; \xi) \to \Omega_i(X,A ; \xi)$ est un automorphisme modulo la classe de Serre des 2-groupes. Il suffit de démontrer le résultat pour $A = \emptyset$ et d'utiliser le lemme des cinq.

Supposons que $\pi_* \circ s : \Omega_i(X ; \xi) \to \Omega_i(X ; \xi)$ soit un automorphisme modulo la classe de Serre des 2-groupes lorsque X est un CW-complexe avec au plus k cellules. Supposons que X soit un CW-complexe avec $k+1$ cellules. $X = X' \underset{\varphi}{\cup} D^n$ où X' est un CW-complexe avec k cellules. On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
\ldots \to \Omega_{i+1}(D^n, S^{n-1} ; \xi|D^n) & \longrightarrow & \Omega_i(X' ; \xi|X') & \longrightarrow & \Omega_i(X ; \xi) & \to & \ldots \\
\downarrow x(2) & & \downarrow & & \downarrow \pi_* \circ s & & \\
\ldots \to \Omega_{i+1}(D^n, S^{n-1} ; \xi|D^n) & \longrightarrow & \Omega_i(X' ; \xi|X') & \longrightarrow & \Omega_i(X ; \xi) & \to & \ldots
\end{array}$$

Il résulte du lemme des cinq que $\pi_* \circ s$ est un automorphisme modulo la classe de Serre des 2-groupes.

Lorsque X est un espace quelconque, on considère le système inductif des applications des CW-complexes finis dans X. Un objet de ce système inductif est une application $f : X_f \to X$, où X_f est un CW-complexe fini. Un morphisme est une application $\varphi_{f,g} : X_g \to X_f$ telle que $g = f \circ \varphi_{f,g}$.

On a $\Omega_i(X\ ;\ \xi) = \varinjlim \Omega_i(X_f\ ;\ f^*(\xi))$, $\pi_* \circ s = \varinjlim(\pi_* \circ s_f)$. Par suite $\pi_* \circ s$ est un automorphisme modulo la classe de Serre des 2-groupes.

cqfd.

On applique ce qui précède au revêtement canonique $S^n \to \mathbb{P}^n$. On note λ_n le 1-fibré vectoriel canonique de base $\mathbb{P}^n$.

L'involution $\Sigma : S^n \times \mathbb{R}^k \circlearrowleft$ définie par $\Sigma\ (x,t) = (-x, -t)$ induit un automorphisme Σ_* de $\Omega_i(S^n\ ;\ 0)$. La suite exacte de Gysin du fibré $D^{n+1} \to *$ induit le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \pi^s_{i-n} & \longrightarrow & \Omega_i(S^n\ ;\ 0) & \longrightarrow & \pi^s_i & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle x(-1)^{k+n+1}} & & \downarrow{\scriptstyle \Sigma_*} & & \downarrow{\scriptstyle x(-1)^k} & & \\ 0 & \longrightarrow & \pi^s_{i-n} & \longrightarrow & \Omega_i(S^n\ ;\ 0) & \longrightarrow & \pi^s_i & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où les suites exactes horizontales se relèvent. Il existe donc un isomorphisme $\Omega_i(S^n\ ;\ 0) \approx \pi^s_i \oplus \pi^s_{i-n}$ avec $\Sigma_*(a,b) = [(-1)^k\ a,\ (-1)^{k+n+1}\ b]$. On a donc d'après la proposition 8.1. :

Proposition 8.2.- Le groupe abélien $\Omega_i(\mathbb{P}^n\ ;\ k\,\lambda_n)$ est isomorphe modulo la classe de Serre des 2-groupes à

0	si	n	impair,	k	impair,
π^s_i	si	n	pair,	k	pair,
π^s_{i-n}	si	n	pair,,	k	impair,
$\pi^s_i \oplus \pi^s_{i-n}$	si	n	impair,	k	pair .

On peut associer cette proposition à la proposition 7.3. pour obtenir des renseignements sur les groupes d'homotopie des variétés de Stiefel.

CHAPITRE II : COBORDISME NORMAL.

Etant donnée une paire de CW-complexes finis (X,A) et un fibré vectoriel stable ξ de base X, on définit au §1 pour tout entier relatif i le groupe de cobordisme normal de dimension i de la paire (X,A) à coefficients dans ξ, noté $\Omega^i(X,A\,;\,\xi)$. On montre que ces groupes ont des propriétés du type cohomologique. Lorsque X est une variété différentielle compacte, il y a entre bordisme normal et cobordisme normal une dualité du type dualité de Poincaré. ξ^r étant un fibré vectoriel de rang r et de base un CW-complexe fini, on lui associe $\sigma(\xi^r) \in \Omega^r(X\,;\,\xi)$ qui est une obstruction à l'existence d'une section partout non nulle de ξ^r ; lorsque $\dim X \leqslant 2r-3$, c'est l'unique obstruction.

1.- Définition des groupes de cobordisme normal.

1.1. Soient (X,A) une paire de CW-complexes finis et ξ^r un fibré vectoriel réel localement trivial de base X et de rang r. On note ξ le fibré vectoriel stable représenté par ξ^r. On se propose de définir pour tout entier $i \in \mathbb{Z}$ un groupe abélien $\Omega^i(X,A\,;\,\xi)$.

On note $S(\xi^r \times \mathbb{R})$ le fibré en sphères associé au fibré vectoriel $\xi^r \times \mathbb{R}$. Ce fibré possède une section naturelle s_{ξ^r} définie par $s_{\xi^r}(x) = (0_x, 1)$. On note $\Gamma_A(\xi^r)$ l'espace des sections continues de $S(\xi^r \times \mathbb{R})$ égales à s_ξ au-dessus de A, muni de la topologie de la convergence compacte.

On note $S\Gamma_A(\xi^r)$ la suspension pointée de $\Gamma_A(\xi^r)$, le point de base

étant s_{ξ^r}. On a une application naturelle $S\Gamma_A(\xi^r) \to \Gamma_A(\xi^r \times \mathbb{R})$. On note S_j l'application composée (j entier $\geqslant 0$)

$$\pi_j(\Gamma_A(\xi^r), s_{\xi^r}) \xrightarrow{S} \pi_{j+1}(S\Gamma_A(\xi^r), s_{\xi^r}) \longrightarrow \pi_{j+1}(\Gamma_A(\xi^r \times \mathbb{R}), s_{\xi^r \times \mathbb{R}}),$$

S désignant l'application suspension.

On appelle <u>groupe de cobordisme normal de dimension</u> $i \in \mathbb{Z}$ <u>de la paire de CW-complexes finis</u> (X,A) <u>à coefficients dans le fibré vectoriel stable</u> ξ <u>de base</u> X, <u>le groupe abélien défini par</u>

$$\Omega^i(X,A\,;\,\xi) = \varinjlim_{N \to +\infty} \pi_{N-i}(\Gamma_A(\xi^N), s_{\xi^N}).$$

On a noté ξ^N un représentant de ξ de rang N.

On note $\Omega^*(X,A\,;\,\xi) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \Omega^i(X,A\,;\,\xi)$, $\Omega^i(X\,;\,\xi) = \Omega^i(X,\emptyset\,;\,\xi)$, $\Omega^*(X\,;\,\xi) = \Omega^*(X,\emptyset\,;\,\xi)$. On a $\Omega^i(*\,;\,0) \approx \pi^s_{-i}$.

<u>1.2</u>. On montre en utilisant le théorème de suspension (cf. [17], th.8.5.11] que l'application S_j définie en 1.1. est une bijection pour $j \leqslant 2r-\dim X-2$, une surjection pour $j \leqslant 2r-\dim X-3$. Par suite on a

$$\Omega^i(X,A\,;\,\xi) \approx \pi_{N-i}(\Gamma_A(\xi^N), s_{\xi^N}) \quad \text{pour} \quad N \geqslant \dim X-i+2.$$

En particulier supposons que ξ^r ait une section partout non nulle s_o. Notons $\Gamma^*_A(\xi^r)$ <u>l'espace des sections partout non nulles de</u> ξ^r, <u>égales à</u> s_o <u>sur</u> A, muni de la topologie de la convergence compacte. On a alors

$$\Omega^i(X,A\,;\,\xi) \approx \pi_{r-i-1}(\Gamma^*_A(\xi^r), s_o) \quad \text{pour} \quad r \geqslant \dim X-i+3.$$

L'espace $\Gamma_A(\xi^r)$ est $[r-\dim X-1]$-connexe. On a donc $\Omega^1(X,A\,;\,\xi) = 0$ pour $i \geqslant \dim X+1$.

<u>1.3</u>. Soient (Y,B) une paire de CW-complexes finis et η un fibré vectoriel

stable de base Y. Soient $f : (X,A) \to (Y,B)$ une application continue et $F : \xi^N \to \eta^N$ un morphisme strict de fibrés vectoriels au-dessus de f. Au couple (f,F) est associée une application continue $\Gamma(F) : \Gamma_B(\eta^N) \to \Gamma_A(\xi^N)$ définie par $F \circ \Gamma(F)(s) = s \circ f$. En passant aux groupes d'homotopie, cela donne un homomorphisme $F^* : \Omega^i(Y,B ; \eta) \to \Omega^i(X,A ; \xi)$. Ω^* est ainsi un foncteur contravariant de la catégorie des fibrés vectoriels stables de base une paire de CW-complexes finis, avec pour morphismes les morphismes stricts, dans la catégorie des groupes abéliens.

2.- Propriétés du type cohomologique.

2.1. L'application restriction $\Gamma(\xi^N) \to \Gamma(\xi^N|A)$ est un fibré de Serre de fibre $\Gamma_A(\xi^N)$. On a donc une suite exacte d'homotopie

$$\ldots \to \pi_{N-i+1}(\Gamma(\xi^N|A)) \to \pi_{N-i}(\Gamma_A(\xi^N)) \to \pi_{N-i}(\Gamma(\xi^N)) \to \pi_{N-i}(\Gamma(\xi^N|A)) \to \ldots$$

qui donne la suite exacte (et définit ∂)

$$\ldots \to \Omega^{i-1}(A ; \xi|A) \xrightarrow{\partial} \Omega^i(X,A ; \xi) \xrightarrow{j^*} \Omega^i(X ; \xi) \xrightarrow{i^*} \Omega^i(A ; \xi|A) \to \ldots$$

On a noté i l'inclusion de A dans X et j l'inclusion de $(X,\emptyset)$ dans (X,A).

2.2. Soient ξ^N et η^N deux fibrés vectoriels de bases X et Y. Soit $F : \xi^N \times I \to \eta^N$ un morphisme strict. On note F_0 et F_1 les restrictions de F à $\xi^N \times 0$ et $\xi^N \times 1$. Alors les applications $(F_0)^*$ et $(F_1)^*$ de $\Gamma(\eta^N)$ dans $\Gamma(\xi^N)$ sont homotopes. Par suite les homomorphismes $(F_0)^*$ et $(F_1)^*$ de $\Omega^*(Y ; \eta)$ dans $\Omega^*(X ; \xi)$ sont égaux.

2.3. (Excision). Soit $B \subset A \subset X$ tel que $\overline{B} \subset \overset{\circ}{A}$. On suppose que

$(X-B,\ A-B)$ est une paire de CW-complexes finis. Alors l'inclusion

$i : (X-B,\ A-B) \to (X,A)$ induit un isomorphisme

$i^* : \Omega^*(X,A\ ;\ \xi) \to \Omega^*(X-B,\ A-B\ ;\ \xi \mid X-B)$.

En effet, l'application restriction $\Gamma_A(\xi^N) \to \Gamma_{A-B}(\xi^N \mid X-B)$ est un homéomorphisme.

3.- Conséquences des propriétés cohomologiques.

3.1. On suppose que l'espace X est pointé ; notons $*$ le point de base. On définit alors des groupes réduits $\tilde{\Omega}^i(X\ ;\ \xi)$ par $\tilde{\Omega}^i(X\ ;\ \xi) = \Omega^i(X,*\ ;\ \xi)$. D'après 2.1. ces groupes réduits entrent dans la suite exacte

$$\ldots \to \tilde{\Omega}^i(X\ ;\ \xi) \to \Omega^i(X\ ;\ \xi) \to \pi^s_{-i} \to \tilde{\Omega}^{i+1}(X\ ;\ \xi) \to \ldots$$

Si le fibré ξ est trivial, le morphisme inclusion $\xi^N \mid \{*\} \to \xi^N$ admet une rétraction. Dans ce cas la suite exacte se scinde en suites exactes courtes

$$0 \to \tilde{\Omega}^i(X\ ;\ 0) \to \Omega^i(X\ ;\ 0) \to \pi^s_{-i} \to 0$$

et l'on a $\Omega^i(X\ ;\ 0) \approx \pi^s_{-i} \oplus \tilde{\Omega}^i(X\ ;\ 0)$.

3.2. Pour chaque triple $X \supset A \supset B$, on a une suite exacte

$$\ldots \to \Omega^{i-1}(A,B\ ;\ \xi|A) \to \Omega^i(X,A\ ;\ \xi) \to \Omega^i(X,B\ ;\ \xi) \to \Omega^i(A,B\ ;\ \xi|A) \to \ldots$$

En prenant $B = \{*\}$, $* \in A$, on montre que pour tout couple (X,A), on a la suite exacte

$$\ldots \to \tilde{\Omega}^{i-1}(A\ ;\ \xi|A) \to \Omega^i(X,A\ ;\ \xi) \to \tilde{\Omega}^i(X\ ;\ \xi) \to \tilde{\Omega}^i(A\ ;\ \xi|A) \to \ldots$$

3.3. Comme pour les groupes Ω_i (I. 4.3.), si ξ est un fibré vectoriel stable de base SX, le groupe $\tilde{\Omega}^i(SX\ ;\ \xi)$ est isomorphe au groupe $\tilde{\Omega}^{i-1}(X\ ;\ \xi|X)$. En particulier $\tilde{\Omega}^i(S^n\ ;\ \xi) \approx \pi^s_{n-i}$.

4.- Relations avec les groupes de cohomologie.

Soit ξ un fibré vectoriel stable de base une paire de CW-complexes finis (X,A). On note ξ^N un représentant de rang N du fibré ξ et π_N la projection de ξ^N.

Soit $[h] \in \pi_{N-i}(\Gamma_A(\xi^N), s_{\xi^N}) \approx \Omega^i(X,A ; \xi)$, N étant un entier suffisamment grand. h est une famille de sections

$$(S^{N-i} \times X , * \times X \cup S^{N-i} \times A) \to (S(\xi^N \times \mathbb{R}), s_{\xi^N}(X)) .$$

Par suite, on a un homomorphisme

$$h^* : H^N(S(\xi^N \times \mathbb{R}), s_{\xi^N}(X) ; \mathbb{Z}(\pi_{N+1}^* \xi)) \to (H^i(X,A ; \mathbb{Z}(\xi)) .$$

On note $B(\xi^N)$ le fibré en boules associé à ξ^N. Soit $U_{\xi^N} \in H^N(B(\xi^N), S(\xi^N) ; \mathbb{Z}(\pi_N^* \xi))$ la classe de Thom en cohomologie du fibré vectoriel ξ^N. On note $c : B(\xi^N) \to S(\xi^N \times \mathbb{R})$ l'application obtenue en collapsant le bord de chaque fibre de $B(\xi^N)$. c induit un isomorphisme

$$c^* : H^N(B(\xi^N), S(\xi^N) ; \mathbb{Z}(\pi_N^* \xi)) \xrightarrow{\approx} H^N(S(\xi^N \times \mathbb{R}), s_{\xi^N}(X) ; \mathbb{Z}(\pi_{N+1}^* \xi)).$$

L'élément $h^*[(c^*)^{-1}(U_{\xi^N})]$ ne dépend que de $[h]$. On pose $\mu([h]) = h^*[(c^*)^{-1}(U_{\xi^N})]$ et l'on a ainsi défini un homomorphisme

$$\mu : \Omega^i(X,A , \xi) \to H^i(X,A ; \mathbb{Z}(\xi)) .$$

On peut aussi, de la même manière, définir $\mu([h])$ en partant de $[g] \in \pi_{N'-i}(\Gamma_A(\xi^{N'}), s_{\xi^{N'}})$ dont la suspension itérée est $[h]$. (l'entier N' pouvant être éventuellement petit).

5.- Dualité de Poincaré.

Entre bordisme normal et cobordisme normal, il existe un isomorphisme

D du type dualité de Poincaré, donné par la proposition suivante :

Proposition 5.1.- Soit X une variété de classe C^∞ compacte dont le bord est la réunion de deux sous-variétés disjointes $\partial_1 X$ et $\partial_2 X$. Soit ξ un fibré vectoriel de base X. Il existe alors un isomorphisme naturel $D : \Omega^{n-i}(X,\partial_1 X ; \xi) \approx \Omega_i(X,\partial_2 X , \xi \oplus \nu(X))$ où $\nu(X)$ est le fibré normal stable de X.

Pour démontrer la proposition 5.1.1., on construit tout d'abord un homomorphisme

$$D : \Omega^{n-i}(X,\partial_1 X ; \xi) \to \Omega_i(X,\partial_2 X ; \xi \oplus \nu(X)) .$$

Soit $[h] \in \Omega^{n-i}(X,\partial_1 X ; \xi) \approx \pi_{N-n+i}(\Gamma_{\partial_1 X}(\xi^N))$, N étant un entier suffisamment grand. $h : S^{N-n+i} \times X^n \to S(\xi^N \times \mathbb{R})$ est une famille de sections telle que $h(*,x) = (0_x,1)$ et $h(t,x) = (0_x,1)$ pour $x \in \partial_1 X$ [$*$ étant le point de base de S^{N-n+i}]. On peut supposer que h et $h|S^{N-n+i} \times \partial X$ sont transversales à la section $-s_{\xi^N}$. $\Delta^i = \bar{h}^1(-s_{\xi^N}(X))$ est alors une sous-variété compacte à bord, de classe C^∞, de bord $\partial\Delta = \bar{h}^1(-s_{\xi^N}(\partial X_2))$. Notons $b : (\Delta,\partial\Delta) \to (X,\partial_2 X)$ l'application $pr_2 \circ h|\Delta$. La transversalité donne de plus un morphisme strict $\nu(S^{N-n+i} \times X^n ; \Delta^i) \to \xi^N$ au-dessus de b, où $\nu(S^{N-n+i} \times X^n ; \Delta^i)$ désigne un fibré normal à $\Delta^i \subset S^{N-n+i} \times X^n$. En suspendant ce morphisme strict par l'identité de $\nu(X)$, fibré normal stable à X, on obtient un morphisme strict $B : \nu(\Delta) \to \xi \oplus \nu(X)$ au-dessus de b. La classe de bordisme normal $[\Delta,b,B]$ ne dépend pas du représentant h de $[h] \in \Omega^{n-i}(X,\partial_1 X ; \xi)$ dont on est parti et l'on pose $D([h]) = [\Delta,b,B]$.

On construit maintenant un homomorphisme

$$U : \Omega_i(X,\partial_2 X ; \xi \oplus \nu X) \to \Omega^{n-i}(X,\partial_1 X ; \xi) .$$

Soit $[\Delta,b,B] \in \Omega_i(X,\partial_2 X ; \xi \oplus \nu X)$. Si N est un entier suffisamment grand, il existe un plongement $\Delta \subset S^{N-n+i}$ dont l'image ne contient pas le point de base $*$ de S^{N-n+i}. Le morphisme strict $B : \nu(\Delta) \to \xi \oplus \nu(X)$ induit un morphisme strict $B_1 : \nu(S^{N-n+i} \times X ; \Delta) \to \xi$ pour N suffisamment grand. Ce dernier permet de définir une famille de sections $h : S^{N-n+i} \times X \to S(\xi \times \mathbb{R})$ telle que $h(*,x) = (0_x,1)$ pour $x \in X$ et $h(t,x) = (0_x,1)$ pour $x \in \partial_1 X$. h représente donc un élément $[h] \in \Omega^{n-i}(X,\partial_1 X ; \xi)$. On montre que $[h]$ ne dépend que de $[\Delta,b,B]$ et l'on pose $U([\Delta,b,B]) = [h]$.

On montre que $D \circ U$ = identité, $U \circ D$ = identité, ce qui achève de démontrer la proposition 5.1.

6.- Existence d'une section partout non nulle d'un fibré vectoriel réel.

Soit ξ^r un fibré vectoriel réel de base un CW-complexe fini X. On va montrer que, pour $\dim X \leqslant 2r-3$, la seule obstruction à l'existence d'une section partout non nulle du fibré ξ^r est un élément du groupe abélien $\Omega^r(X ; \xi)$.

6.1. Soient (X,A) une paire de CW-complexes finis et ξ^r un fibré vectoriel de base X. Soit s une section de ξ^r telle que $s(x) \neq 0$ pour $x \in A$. Quitte à remplacer s par une section homotope, on peut supposer que s induit une application $s : X \to B(\xi^r)$ telle que $s(x) \in S(\xi^r)$ pour $x \in A$.

Par ailleurs on a une application naturelle $c : B(\xi^r) \to S(\xi^r \times \mathbb{R})$ obtenue en collapsant le bord de chaque fibre de $B(\xi^r)$. Notons $\sigma_o(\xi^r, s|A) = [c \circ s] \in \pi_o(\Gamma_A(\xi^r))$. La suspension envoie $\pi_o(\Gamma_A(\xi^r))$ dans $\Omega^r(X, A ; \xi)$. On note $\sigma(\xi^r, s|A)$ l'image de $\sigma_o(\xi^r, s|A)$ dans $\Omega^r(X, A ; \xi)$. Lorsque $A = \emptyset$, on note $\sigma(\xi^r) = \sigma(\xi^r, s|\emptyset)$.

6.2. Proposition.- Si $s|A$ se prolonge en une section partout non nulle au-dessus de X, alors $\sigma(\xi^r, s|A) = 0$. Réciproquement, si $\dim X \leqslant 2r-3$ et si $\sigma(\xi^r, s|A) = 0$, la section $s|A$ au-dessus de A se prolonge en une section partout non nulle au-dessus de X.

Démonstration.

a) Si $s|A$ se prolonge en une section partout non nulle sur X, s est homotope rel A à une section s' telle que $s'(x) \in S(\xi^r)$ pour $x \in X$. On a donc $[c \circ s] = [c \circ s'] = 0$ dans $\pi_o(\Gamma_A(\xi^r))$, d'où $\sigma(\xi, s|A) = 0$.

b) On suppose maintenant $\sigma(\xi^r, s|A) = 0$. Si $\dim \leqslant 2r-2$, d'après le §1.2. cette hypothèse est équivalente à $\sigma_o(\xi^r, s|A) = 0$. Autrement dit, la section $c \circ s$ est homotope rel A à la section s_{ξ^r}. On en déduit que s est homotope rel A à une section partout non nulle, si la suspension $S : \pi_{i-1}(S^{r-1}) \to \pi_i(S^r)$ est injective pour $i \leqslant \dim X$, surjective pour $i \leqslant \dim X+1$. Par suite, pour $\dim X \leqslant 2r-3$, $s|A$ se prolonge en une section partout non nulle au-dessus de X.

c.q.f.d.

$\sigma(\xi^r) \in \Omega^r(X ; \xi)$ est invariant par tout automorphisme de $\Omega^r(X ; \xi)$ induit par un X-automorphisme de ξ^r. Cela est évident si l'on définit

$\sigma(\xi^r)$ à partir de la section nulle de ξ^r. Plus généralement, si $f : Y \to X$ est une application continue entre CW-complexes finis et si $F : \eta^r \to \xi^r$ est un morphisme strict au-dessus de f, on a $F^*(\sigma(\xi^r)) = \sigma(\eta^r)$.

6.3. On note π_N la projection du fibré ξ^N. D'après la définition de l'homomorphisme $\mu : \Omega^r(X ; \xi) \to H^r(X ; \mathbb{Z}(\xi))$, on a $\mu(\sigma(\xi^r)) = s^*(U_\xi)$ où s est une section de ξ^r et $U_\xi \in H^r(B(\xi^r), S(\xi^r) ; \mathbb{Z}(\pi_r^*(\xi)))$ la classe de Thom en cohomologie du fibré vectoriel ξ^r. Mais par définition $s^*(U_\xi)$ est la classe d'Euler $\chi(\xi^r) \in H^r(X ; \mathbb{Z}(\xi))$. On a donc :

Proposition.- L'image de $\sigma(\xi^r) \in \Omega^r(X ; \xi)$ par l'homomorphisme $\mu : \Omega^r(X ; \xi) \to H^r(X ; \mathbb{Z}(\xi))$ est la classe d'Euler $\chi(\xi^r)$.

L'application $c : B(\xi^r) \to S(\xi^r \times \mathbb{R})$ représente un élément $U^c_{\xi^r} \in \Omega^r(B(\xi^r), S(\xi^r) ; \pi_r^*(\xi))$ que l'on appelle classe de Thom en cobordisme normal. On a $\mu(U^c_{\xi^r}) = U_{\xi^r}$. De plus, si $s : (X,\emptyset) \to (B(\xi^r), S(\xi^r))$ est une section du fibré ξ^r, on a $s^*(U^c_{\xi^r}) = \sigma(\xi^r)$.

6.4. On suppose que X^n est une variété différentielle compacte de bord ∂X éventuellement vide. On suppose que ∂X est la réunion disjointe de deux sous-variétés $\partial_1 X$ et $\partial_2 X$. Soient ξ^r un fibré vectoriel de base X^n et s une section de ξ^r, partout non nulle au-dessus de $\partial_1 X$. On note $\bar{\sigma}(\xi^r, s|\partial_1 X) = D(\sigma(\xi^r, s|\partial_1 X)) \in \Omega_{n-r}(X, \partial_2 X ; \xi \oplus \nu X)$.

D'après la définition de D, on peut donner une construction de $\bar{\sigma}(\xi^r, s|\partial_1 X)$ comme suit. On remplace tout d'abord s par une section telle que s et $s|\partial_2 X$ soient transversales à la section nulle X de ξ_r. On

note $\Delta = \bar{s}^1(X)$, sous-variété compacte de bord $\partial\Delta = \bar{s}^1(\partial_2 X)$. On note b l'inclusion de $(\Delta,\partial\Delta)$ dans $(X,\partial_2 X)$. La transversalité induit aussi un morphisme strict $\nu^r(X\ ;\ \Delta) \to \xi^r$ au-dessus de b. En suspendant ce morphisme strict par l'identité de $\nu(X)$, on obtient un morphisme strict $B : \nu(\Delta) \to \xi \oplus \nu(X)$ au-dessus de b. Alors on a $[\Delta,b,B] = \bar{\sigma}(\xi^r, s|\partial_1 X)$.

6.5. Soit $\pi : \tilde{X} \to X$ un revêtement à deux feuillets. Soit ξ^r un fibré vectoriel de base X et de rang r. On suppose que X est une variété différentielle. En I.8., on a défini un homomorphisme

$$s : \Omega_i(X,\partial X\ ;\ \xi) \to \Omega_i(\tilde{X},\partial\tilde{X}\ ;\ \pi^*\xi) .$$

D'après 6.3., on a $s(\bar{\sigma}(\xi^r)) = \bar{\sigma}(\pi^*\,\xi^r)$.

En particulier, si $\pi^*\,\xi^r$ est trivial, on a $\bar{\sigma}(\pi^*\,\xi^r) = 0$, d'où $s(\bar{\sigma}(\xi^r)) = 0$. D'après I.8.1., $\bar{\sigma}(\xi^r)$ est alors un élément dont l'ordre est une puissance de 2. Il en est donc de même de $\sigma(\xi^r)$ par dualité de Poincaré.

CHAPITRE III : APPLICATIONS EXCELLENTES ET APPLICATIONS PARFAITES.

Dans ce chapitre, on introduit les applications excellentes et les applications parfaites. Ces applications permettront au chapitre IV de faire le lien entre les groupes d'homotopie des espaces de plongements et les groupes de bordisme normal.

1.- Définition et étude des applications excellentes.

1.1. Soient X^a et Y^b deux variétés différentielles (de classe C^∞), $f : X \to Y$ une application différentiable, $f_* : \tau X \to \tau Y$ son application linéaire tangente. On note $\tau^* X$ le fibré de base X formé des vecteurs tangents non nuls à X.

Définition. On dit que l'application f est correcte au point $x_o \in X$ si l'application $f_* | E(\tau^* X) : E(\tau^* X) \to E(\tau Y)$ est transversale à la section nulle de $E(\tau Y)$ en tout point de $E(\tau^*_{x_o} X)$. On dit que l'application f est correcte si elle est correcte en tout point $x_o \in X$.

Soit $f : (\mathbb{R}^a, 0) \to (\mathbb{R}^b, 0)$ un germe d'application différentiable. f est correct à l'origine si et seulement si pour tout vecteur non nul $X = (X_1, \ldots, X_a)$ tel que $f_*(0, X) = 0$, les $2a$ vecteurs

$$(1.1.1.) \qquad \frac{\partial f}{\partial x_i}(0),\ 1 \leqslant i \leqslant a\ ,\ \sum_{i=1}^{a} X_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0),\ 1 \leqslant j \leqslant a\ ,$$

engendrent l'espace vectoriel $\mathbb{R}^b$.

Exemple 1. Une fonction $X \to \mathbb{R}$ est correcte en un point critique si et seulement si c'est un point critique non-dégénéré.

Exemple 2. Soit r le rang de f au point $x_o \in X$. On suppose que la première

dérivée de f, $f^1 : X \to J^1(X,Y)$ [où $J^1(X,Y)$ est l'espace des 1-jets de X dans Y], est transversale en x_o à la sous-variété des jets de rang r. Alors l'application f est correcte au point x_o. Et pour $r = \inf(a,b)-1$, ces propriétés sont équivalentes.

Munissons X d'une structure riemannienne et notons $S(\tau X)$ le fibré en sphères formé des vecteurs tangents à X de longueur unité. L'application f est correcte au point $x_o \in X$ si et seulement si l'application $f_* | S(\tau X) : S(\tau X) \to E(\tau Y)$ est transversale à la section nulle de $E(\tau Y)$ en tout point de $S(\tau_{x_o} X)$.

On note $\mathrm{Hom}(X,Y)$ l'espace des applications différentiables de X dans Y muni de la topologie $\mathcal{C}^\infty$. L'application $f \to f_* | S(\tau Y)$ de $\mathrm{Hom}(X,Y)$ dans $\mathrm{Hom}(S(\tau X), E(\tau Y))$ est continue. Les applications de $S(\tau X)$ dans $E(\tau Y)$ transversales à la section nulle de $E(\tau Y)$ forment un ouvert de $\mathrm{Hom}(S(\tau X), E(\tau Y))$. Par suite les applications correctes de X dans Y forment un ouvert de $\mathrm{Hom}(X,Y)$. Cet ouvert est dense d'après le lemme de transversalité [utiliser par ex. [13], 6.05, lemme fondamental].

1.2. Définition. On dit qu'une application f de X dans Y est excellente si elle est correcte et si de plus l'application $f \times f : X \times X \to Y \times Y$ restreinte au complémentaire de la diagonale de $X \times X$ est transversale à la diagonale Δ_Y de $Y \times Y$.

Exemple : une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ est excellente si et seulement si c'est une fonction de Morse, c'est-à-dire si tous ses points critiques sont non-dégénérés

et toutes ses valeurs critiques distinctes.

Proposition 1.2.1.- Les applications excellentes de X dans Y forment un ouvert dense de $\mathrm{Hom}(X,Y)$ muni de la topologie $\mathcal{C}^\infty$.

Compte-tenu du lemme de transversalité au but, cette proposition découle du lemme suivant :

lemme. Soit $f : X \to Y$ une application correcte. Il existe un voisinage ouvert U de la diagonale de Δ_X de $X \times X$ et un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de $f \in \mathrm{Hom}(X,Y)$ tels que pour $g \in \mathcal{V}$, $g \times g \mid U - \Delta_X$ soit transversale à la diagonale Δ_Y de $Y \times Y$.

Ce dernier lemme se démontre à partir du lemme local suivant :

lemme local. Soit $f : X \to Y$ une application correcte au point $x_o \in X$. Il existe un voisinage ouvert V de $x_o \in X$ et un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de $f \in \mathrm{Hom}(X,Y)$ tels que pour $g \in \mathcal{V}$, $g \times g \mid V \times V - \Delta_V$ soit transversale à la diagonale de $Y \times Y$.

Démonstration. On met au voisinage de x_o dans X et au voisinage de $f(x_o)$ dans Y des systèmes de coordonnées $(x_1, \ldots, x_a)$ et $(y_1, \ldots, y_b)$ centrés en x_o et $f(x_o)$. Soient x, x' deux points distincts voisins de l'origine dans $\mathbb{R}^a$. $f \times f$ est transversale à la diagonale de $\mathbb{R}^b \times \mathbb{R}^b$ au point (x,x') si et seulement si les 2 a vecteurs $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x')$ engendrent $\mathbb{R}^b$ lorsque $f(x') = f(x)$.

Mais on peut écrire

$$f(x') - f(x) = \sum_{i=1}^{a} (x'_i - x_i)\alpha_i(x,x')$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x') - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \sum_{i=1}^{a} (x'_i - x_i)\, \alpha_{i,j}(x,x') ,$$

où les α_i et $\alpha_{i,j}$ sont des applications différentiables qui peuvent être choisies de façon continue en fonction de f. De plus $\alpha_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$, $\alpha_{i,j}(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0)$.

Par suite $f \times f$ est transversale à la diagonale de $\mathbb{R}^b \times \mathbb{R}^b$ au point (x,x'), $x \neq x'$, si et seulement si les $2a$ vecteurs

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x),\ 1 \leqslant i \leqslant a\ ,\ \sum_{i=1}^{a} (x'_i - x_i)\ \alpha_{i,j}(x,x'),\ 1 \leqslant j \leqslant a\ ,$$

engendrent $\mathbb{R}^b$ chaque fois que $\sum_{i=1}^{a} (x'_i - x_i)\ \alpha_i(x,x') = 0$. Le lemme local résulte alors de (1.1.1.).

1.3. Soient V^n et M^m deux variétés différentielles, V^n étant compacte sans bord. Soit $f = (f_t)_{t \in I^k}$ une famille différentiable d'applications de V^n dans M^m telle que f_t soit un plongement pour $t \in \partial I^k$. Soit $f' : V^n \times I^k \to M^m \times I^k$ l'application définie par $f'(x,t) = (f_t(x), t)$. Nous dirons que f est une famille excellente (resp. correcte) si l'application f' est excellente (resp. correcte).

Soit $f = (f_t)_{t \in I^k}$ une famille différentiable d'applications de V^n dans M^m telle que f_t soit un plongement pour $t \in \partial I^k$. Nous allons montrer que l'on peut toujours approcher f rel ∂I^k par une famille excellente.

En effet, d'après la proposition 1.2.1., on peut toujours approcher f' rel $V^n \times \partial I^k$ par une application excellente $h : V^n \times I^k \to M^m \times I^k$. L'application $\zeta : V^n \times I^k \circlearrowleft$ définie par $\zeta(x,t) = (x,h(x,t))$ est un difféomorphisme voisin de l'identité. $h \circ \zeta^{-1}$ est alors de la forme g' où g est une famille excellente voisine de f.

En particulier, pour $0 \leqslant k \leqslant m-2n-1$, on peut toujours approcher f rel ∂I^k par une famille de plongements. Le domaine $0 \leqslant k \leqslant m-2n-1$ s'appelle domaine stable.

1.4. Nous allons démontrer dans ce paragraphe deux lemmes où interviennent les applications correctes et les applications excellentes, lemmes dont nous aurons besoin au chapitre V .

lemme 1.4.1. Soit X^a une sous-variété de $Y^b \times I^k$ telle que l'application $t = pr_2|X^a$ soit correcte. Soit u un champ de vecteurs non nuls le long de X^a tel que $\langle dt,u\rangle = 0$; on suppose que u est transverse à X^a le long d'un fermé F de X^a . Alors, si $k+b-2a-1 \geqslant 0$, il existe le long de X^a un champ u' de vecteurs non nuls aussi voisin de u que l'on veut, transverse à X^a , égal à u sur F et satisfaisant à $\langle dt,u'\rangle = 0$.

Démonstration. On note $S(\xi)$ le fibré en sphères associé à un fibré vectoriel ξ . Le champ u de vecteurs non nuls tel que $\langle dt,u\rangle = 0$ peut être considéré comme une section du fibré en sphères $S[(\tau Y^b \times I^k)|X^a]$. Le champ u sera transverse à X^a si la section évite $N = S[(\tau Y^b \times I^k)|X^a] \cap S(\tau X^a)$. L'application t est correcte, cela équivaut à dire que les deux sous-variétés $S[(\tau Y^b \times I^k)|X^a]$ et $S(\tau X^a)$ de $S[\tau(Y^b \times I^k)|X^a]$ sont transversales. Par suite N est une sous-variété de $S[(\tau Y^b \times I^k)|X^a]$ de codimension $b-a+k$. Donc, si $b-a+k \geqslant a+1$, on peut approcher la section u de $S[(\tau Y^b \times I^k)|X^a]$ par une section u' évitant N , égale à u sur le fermé F .

c.q.f.d.

lemme 1.4.2. Soient X, Y, Z trois variétés de dimensions a, b, c, la variété Z étant compacte. Soit $\tau : X \to Y$ une application excellente. Soient $f \in P\ell(Z,X)$ et A une sous-variété fermée de codimension 0 de Z tels que $\tau \circ f|A$ soit un plongement. On suppose réalisée la condition (c) suivante : $\tau \circ f|A$ et $\tau|X - f(A)$ sont deux applications transversales. Alors, si $b \geqslant 2c+1$, on peut approcher f autant que l'on veut par un plongement g coïncidant avec f sur A et tel que $\tau \circ g$ soit un plongement.

La condition (c) est entraînée par la condition (c') suivante qui est indépendante de la variété A : $\tau \circ f \times \tau \in \mathrm{Hom}(Z \times X, Y \times Y)$ est transversale à Δ_Y en tout point (z,x) tel que $x \neq f(z)$.

Démonstration. On note $J^1_o(Z,X)$ le sous-espace de $J^1(Z,X)$ formé des jets de rang c. On note N le sous-espace de $E(\tau^*X)$ formé des vecteurs dont l'image par τ_* est un vecteur nul de τY. L'application τ étant correcte, N est une sous-variété fermée de codimension b de $E(\tau^*X)$. On considère l'application naturelle

$$\varphi : E(S(\tau Z)) \; X_Z \; J^1_o(Z,X) \longrightarrow E(\tau^*X)$$
$$(t_z \; , \; j_z) \mapsto j_z(t_z)$$

φ étant une submersion, $P = \bar{\varphi}^1(N)$ est une sous-variété fermée de codimension b de $E(S(\tau Z)) \; X_Z \; J^1_o(Z,X)$.

f étant un plongement, toute application g suffisamment proche de f est un plongement. $\tau \circ g$ est une immersion si et seulement si la première dérivée $g^1 : Z \to J^1_o(Z,X)$ évite $\mathrm{pr}_2(P)$. $\tau \circ f|A$ étant un plongement,

$f^1|A$ évite $pr_2(P)$. D'après le lemme de transversalité, si $\dim J^1_o(Z,X) - \dim P \geqslant \dim Z+1$, i.e. $b \geqslant 2c$, il existe un plongement g voisin de f , égal à f sur A , tel que g^1 évite $pr_2(P)$. $\tau \circ g$ est alors une immersion.

La condition $\tau \circ f(A) \cap \tau \circ g(Z-A) = \emptyset$ équivaut à dire que $g|Z-A : Z-A \to X-f(A)$ évite $\overbrace{(\tau|X-f(A))}^{-1}(\tau \circ f(A))$, sous-variété fermée de codimension $b-c$ d'après la condition (c). D'après le lemme de transversalité, si $b-c \geqslant \dim(Z-A) + 1$, i.e. $b \geqslant 2c+1$, quitte à remplacer g par un plongement voisin égal à f sur A , $\tau \circ f(A) \cap \tau \circ g(Z-A) = \emptyset$.

$\tau \circ g$ sera un plongement si et seulement si $g \times g : Z \times Z \to X \times X$ évite $(\tau \times \tau)^{-1}(\Delta_Y) - \Delta_X$, sous-variété de codimension b car l'application τ est excellente. $g \times g \mid A \times Z$ évite déjà cette sous-variété. D'après le lemme de transversalité au but, si $b \geqslant 2c+1$, quitte à remplacer g par un plongement voisin égal à f sur A , $\tau \circ g$ est un plongement.

c.q.f.d.

2.- Etude des points singuliers de type $\Sigma^{1,0}$.

Soient V^n et M^m deux variétés différentielles. On rappelle tout d'abord la définition et quelques propriétés des points singuliers de type $\Sigma^{1,0}$.

Définition. $v \in V^n$ est un point singulier de type $\Sigma^{1,0}$ de l'application différentiable $f : V^n \to M^m$ si l'on a les propriétés suivantes :

(s_1) le rang de f au point v est égal à $n-1$;

(s_2) la première dérivée de f , $f^1 : V^n \to J^1(V^n, M^m)$ est transversale au point v à la sous-variété de l'espace $J^1(V^n, M^m)$ (espace des 1-jets de

V^n dans M^m) formée des jets de rang $n-1$;

il suit de là que les points singuliers de f forment au voisinage de v une sous-variété S de dimension $2n-m-1$;

(s_3) $f|S$ est une immersion au point v .

Pour $n = 2$, $m = 3$, on parle de point cuspidal, et pour $m = n$, on parle de pli.

Soit $f : (\mathbb{R}^n,0) \to (\mathbb{R}^m,0)$ un germe d'application différentiable tel que $\frac{\partial f}{\partial x_1}(0) = 0$. f admet l'origine comme point singulier de type $\Sigma^{1,0}$ si et seulement si

(1) les vecteurs $\frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$, $2 \leqslant i \leqslant n$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_i}(0)$, $1 \leqslant i \leqslant n$ engendrent $\mathbb{R}^m$;

(2) les n vecteurs $\frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$, $2 \leqslant i \leqslant n$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(0)$, sont linéairement indépendants.

Si v est un point singulier de type $\Sigma^{1,0}$ de $f : V^n \to M^m$, il existe des cartes en v et $f(v)$ telles que f ait pour expression locale

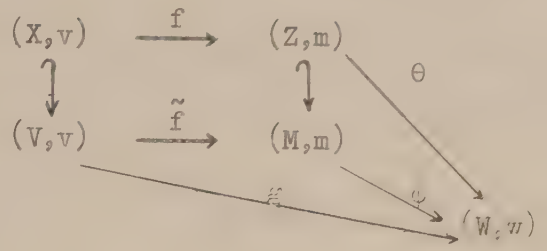
$$f(x_1,\ldots, x_n) = (x_1^2, x_2,\ldots, x_n, x_1x_2,\ldots, x_1x_{m-n+1}) .$$

lemme 2.1. (Propriété universelle des points singuliers de type $\Sigma^{1,0}$).

On considère deux paires de variétés pointées, (V^n, X^{n-p}, v) et (M^m, Z^{m-2p}, m) et un germe de point singulier de type $\Sigma^{1,0}$, $f : (X,v) \to (Z,m)$. Tout germe de point singulier de type $\Sigma^{1,0}$, $\tilde{f} : (V,v) \to (M,m)$, prolongeant f , possède la propriété universelle suivante :

Quels que soient la variété pointée (W,w), le germe $g : (V,v) \to (W,w)$

et le germe $\theta : (Z,m) \to (W,w)$ tels que $\theta \circ f = g|X$, il existe un germe $\phi : (M,m) \to (W,w)$ rendant commutatif le diagramme



La différentielle de ϕ au point m est indépendante du choix particulier de ϕ.

Démonstration. f étant un germe de point singulier de type $\Sigma^{1,0}$, il existe un système de coordonnées $(a, x_1, \ldots, x_{n-p-1})$ sur X au voisinage de v, nulles en v, et un système de coordonnées $(A, X_1, \ldots, X_{n-p-1}, Y_1, \ldots, Y_{m-n-p})$ sur Z au voisinage de m, nulles en m, tels que

$$f(a, x_1, \ldots, x_{n-p-1}) = (a^2, x_1, \ldots, x_{n-p-1}, ax_1, \ldots, ax_{m-n-p}) .$$

On étend le système $(a, x_1, \ldots, x_{n-p-1})$ en un système de coordonnées $(a, x_1, \ldots, x_{n-1})$ sur V au voisinage de v, nulles en v, et le système $(A, X_1, \ldots, X_{n-p-1}, Y_1, \ldots, Y_{m-n-p})$ en un système de coordonnées $(A, X_1, \ldots, X_{n-1}, Y_1, \ldots, Y_{m-n-p}, Y_{n-p}, \ldots, Y_{n-1})$ sur M au voisinage de m, nulles en m. On définit un germe de point singulier de type $\Sigma^{1,0}$, $\tilde{f}_o : (V,v) \to (M,m)$, prolongeant f, par

$$\tilde{f}_o(a, x_1, \ldots, x_{n-1}) = (a^2, x_1, \ldots, x_{n-1}, ax_1, \ldots, ax_{m-n-p}, ax_{n-p}, \ldots, ax_{n-1}).$$

Nous allons montrer que $\tilde{f}_o$ possède la propriété universelle énoncée dans le lemme 2.1.. Choisissons un système de coordonnées sur W au voisinage de w, nulles en w. La relation $\theta \circ f = g|X$ s'écrit en coordonnées locales

$$g(a, x_1, \ldots, x_{n-p-1}, 0, \ldots, 0) = \theta(a^2, x_1, \ldots, x_{n-p-1}, ax_1, \ldots, ax_{m-n-p}) .$$

Par suite il existe des germes $\omega_i : (V,v) \to (W,w)$, $0 \leqslant i \leqslant p-1$, tels que

$$g(a,x) = \theta(a^2, x_1, \ldots, x_{n-p-1}, ax_1, \ldots, ax_{m-n-p}) + \sum_{i=0}^{p-1} x_{n-p+i}\, \omega_i(a,x)$$

où $x = (x_1, \ldots, x_{n-1})$. Il existe aussi d'après Whitney des germes α_i et β_i : $(V,v) \to (W,w)$, $0 \leqslant i \leqslant p-1$, tels que

$$\omega_i(a,x) = \alpha_i(a^2,x) + a\, \beta_i(a^2,x) .$$

Il suffit donc de prendre pour ψ le germe défini par

$$\psi(A,X,Y_1,\ldots, Y_{m-n-p}, Y_{n-p},\ldots, Y_{n-1}) = \theta(A,X_1,\ldots, X_{n-p-1},Y_1,\ldots, Y_{m-n-p}) + \sum_{i=0}^{p-1} X_{n-p+i}\alpha_i(A,X) + \sum_{i=0}^{p-1} Y_{n-p+i}\, \beta_i(A,X)$$

où l'on a noté $X = (X_1, \ldots, X_{n-1})$.

La différentielle de ψ au point m est indépendante du choix particulier de ψ ; en effet, la relation $\psi \circ \tilde{f}_o = g$ entraîne

$$\frac{\partial \psi}{\partial A}(m) = \tfrac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial a^2}(v),$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial X_i}(m) = \frac{\partial g}{\partial x_i}(v) , \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial Y_j}(m) = \frac{\partial^2 g}{\partial a\, \partial x_j}(v), \quad 1 \leqslant j \leqslant m-n-p,\ n-p \leqslant j \leqslant n-1 .$$

[Ou encore : en un point double d de $\tilde{f}_o$ voisin de m , les images par $(\tilde{f}_o)_*$ des espaces tangents engendrent l'espace tangent à M en m ; par suite la différentielle de ψ au point d est indépendante du choix particulier de ψ ; on termine en remarquant que m est adhérent à l'ensemble des points doubles de $\tilde{f}_o$.]

Montrons maintenant que tout germe de point singulier de type $\Sigma^{1,0}$, $\tilde{f} : (V,v) \to (M,m)$, prolongeant f , possède la propriété universelle énon-

cée dans le lemme 2.1. . $\tilde{f}_o$ possédant cette propriété universelle, en prenant $g = \tilde{f}$, $(W,w) = (M,m)$, θ = inclusion de Z dans M , on montre qu'il existe un germe $\varphi : (M,m) \to (M,m)$ tel que $\varphi \circ \tilde{f}_o = \tilde{f}$, $\varphi|Z$ = inclusion de Z . D'après ce qui précède, on a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial A}(m) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial a^2}(v) ,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial X_i}(m) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(v), \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial Y_j}(m) = \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial a\, \partial x_j}(v), \quad 1 \leqslant j \leqslant m-n-p,\ n-p \leqslant j \leqslant n-1 .$$

Le point v étant un point singulier de type $\Sigma^{1,0}$ de $\tilde{f}$, les vecteurs précédents engendrent $\mathbb{R}^m$, donc φ est un difféomorphisme local au point v , ce qui achève la démonstration du lemme 2.1. .

3.- Définition et description des applications parfaites.

On considère dans ce paragraphe deux variétés différentielles V^n et M^m .

Définition. On dit qu'une application différentiable $f : V^n \to M^m$ est parfaite si elle possède les propriétés suivantes :

(P_1) les points singuliers de f sont de type $\Sigma^{1,0}$;

(P_2) un point double n'est pas l'image d'un point singulier ;

(P_3) en un point double $\delta = f(d_1) = f(d_2)$, $d_1 \neq d_2$, les images par f_* des espaces tangents à V^n en d_1 et d_2 engendrent l'espace tangent à M^m en δ ;

(P_4) f n'a pas de point triple .

Pour la fin de ce paragraphe, on suppose que la variété V^n est compacte sans bord.

D'après le §2, les points singuliers d'une application parfaite $f : V^n \to M^m$ forment une sous-variété compacte S^{2n-m-1} de V^n. Les points doubles de f forment dans M^m l'intérieur d'une sous-variété compacte Δ^{2n-m} dont le bord $\partial\Delta$ est $f(S)$. $D^{2n-m} = \bar{f}^1(\Delta)$ est une sous-variété compacte sans bord de V^n, possédant S comme sous-variété de codimension 1. S est aussi l'ensemble des points singuliers de $f|D : D \to \Delta$ et ces points singuliers sont des plis [i.e. ils possèdent une expression locale de la forme $(u_1, \ldots, u_{2n-m}) \to (u_1^2, u_2, \ldots, u_{2n-m})$].

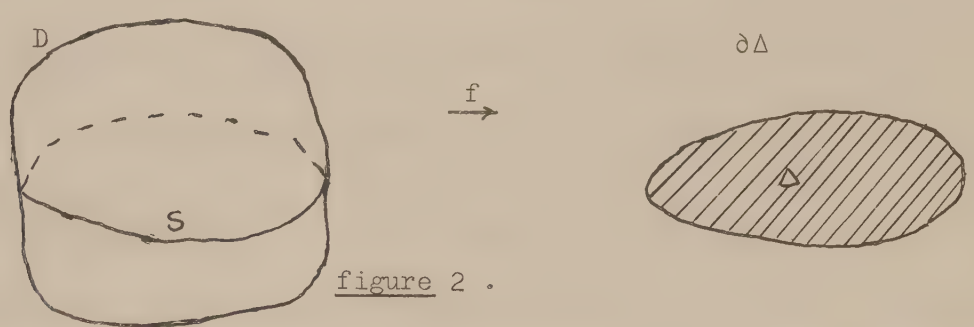


figure 2 .

D'après le lemme de transversalité, si $2m-3n-1 \geqslant 0$, les applications parfaites de V^n dans M^m forment un ouvert dense de $\mathrm{Hom}(V^n, M^m)$ pour la topologie C^∞ ([7], 2.5.). D'après les conditions (P_1) et (P_3), une application parfaite est excellente.

Soit $f = (f_t)_{t \in I^k}$ une famille différentiable d'applications de V^n dans M^m telle que f_t soit un plongement pour $t \in \partial I^k$. Soit $f' : V^n \times I^k \to M^m \times I^k$ l'application définie par $f'(x,t) = (f_t(x), t)$. Nous dirons que f est une famille parfaite si l'application f' est parfaite.

On montre, en utilisant la même méthode qu'au §1.3., que pour $k \leqslant 2m-3n-1$, on peut approcher la famille f rel ∂I^k par une famille parfaite.

CHAPITRE IV : ETUDE DES ESPACES DE PLONGEMENTS.

Soient V^n une variété différentielle (de classe C^∞) compacte sans bord, M^m une variété différentielle, $m, n \geqslant 0$. On note $\mathrm{Hom}(V^n, M^m)$ l'espace des applications de classe C^∞ de V^n dans M^m muni de la topologie C^∞, $P\ell(V^n, M^m)$ le sous-espace des plongements. Dans ce chapitre on se propose d'associer à toute application continue $f : V^n \to M^m$ une paire topologique $(\mathcal{C}_f, \partial W)$ et un fibré vectoriel stable θ_f de base $\mathcal{C}_f$. Ensuite à toute application continue $f : V^n \to M^m$ on associera un élément $\alpha_o(f) \in \Omega_{2n-m}(\mathcal{C}_f, \partial W; \theta_f)$. Et à tout entier $k \geqslant 1$ et tout plongement $f_o : V^n \to M^m$, on associera un homomorphisme (application si $k = 1$)

$$\alpha_k : \pi_k(\mathrm{Hom}(V^n, M^m), P\ell, f_o) \to \Omega_{2n-m+k}(\mathcal{C}_f, \partial W ; \theta_f) .$$

On terminera ce chapitre en énonçant le résultat fondamental de ce travail, résultat qui concerne α_k.

1.- Construction du fibré vectoriel stable θ_f.

On se donne une variété différentielle V^n compacte sans bord, une variété différentielle M^m et une application continue $f : V^n \to M^m$. On construit dans ce paragraphe successivement une variété différentielle W^{2n} compacte à bord (éventuellement vide), un fibré vectoriel différentiel ω de base W et de rang 1, une paire d'espaces topologiques $(\mathcal{C}_f, \partial W)$ et un fibré vectoriel stable θ_f de base $\mathcal{C}_f$.

1.1. La variété différentielle W^{2n}.

On construit tout d'abord une variété différentielle $\tilde{W}^{2n}$ compacte sans

bord, munie d'une involution différentiable σ , de la façon suivante. On note F_σ la sous-variété de $\tilde{W}^{2n}$ formée des points fixes de σ . On prend $(\tilde{W}^{2n} - F_\sigma, \sigma) = (V^n \times V^n - \Delta_V , s)$ où Δ_V est la diagonale de $V^n \times V^n$ et $s(x,y) = (y,x)$. On prend pour F_σ la variété différentielle des sous-espaces vectoriels de dimension 1 des fibres du fibré tangent à V^n . Munissons V^n d'une structure riemannienne et notons $S(\tau V^n)$ le fibré en sphères de rayon unité associé au fibré tangent τV^n . Notons T_ε $(\varepsilon \geqslant 0)$ la variété différentielle quotient de $S(\tau V^n) \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ par la relation qui identifie (t,a) et $(-t,-a)$. F_σ s'identifie à T_o . La variété différentielle $\tilde{W}^{2n}$ s'obtient alors en recollant T_ε et $V^n \times V^n - \Delta_V$, $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, au moyen du plongement

$$(1) \qquad \begin{aligned} T_\varepsilon - T_o &\longrightarrow V^n \times V^n - \Delta_V \\ (t,a) &\longmapsto [\exp(-at), \exp(at)] . \end{aligned}$$

$\tilde{W}^{2n}$ est une variété différentielle compacte sans bord. σ est une involution différentiable de $\tilde{W}^{2n}$ dont les points fixes forment une sous-variété F_σ de codimension 1. On montre que la structure différentielle mise sur $(V \times V - \Delta_V) \cup F_\sigma$ pour obtenir $\tilde{W}^{2n}$ est indépendante de la métrique riemannienne choisie sur V^n . L'application (1), prolongée par l'application identique de l'espace $V^n \times V^n - \Delta_V$ dans lui-même, définit une application différentiable $\mu : \tilde{W}^{2n} \to V^n \times V^n$.

On note W^{2n} la variété quotient de $\tilde{W}^{2n}$ par σ dans la catégorie des variétés différentielles. On note $r : \tilde{W}^{2n} \to W^{2n}$ l'application différentiable

quotient ; les points singuliers de r sont des plis [i.e. ils possèdent une expression locale de la forme $(u_1, \ldots, u_{2n}) \mapsto (u_1^2, u_2, \ldots, u_{2n})$]. W^{2n} est une variété compacte dont le bord ∂W s'identifie à T_o .

1.2. Le 1-fibré vectoriel ω de base W .

lemme 1.2.1. Soit ξ un fibré vectoriel différentiel dont la base X est une variété différentielle sans bord. Soit $\bar{\sigma}$ une involution différentiable linéaire fibrée de ξ . On suppose que les points fixes de $\sigma = \bar{\sigma}|X$ forment une sous-variété F_σ de X de codimension 1 . Alors le quotient de ξ par $\bar{\sigma}$ existe dans la catégorie des fibrés vectoriels différentiels; le rang du fibré quotient est égal au rang de ξ ; le morphisme quotient $r_1 : \xi \to \xi/\bar{\sigma}$ est au-dessus de l'application différentiable quotient $r : X \to X/\sigma$.

Démonstration.

a) On suppose que $X = \mathbb{R}^n$, $\xi = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s$ et que $\bar{\sigma}$ soit donné par $\bar{\sigma}(x_1, \ldots, x_n, X_1, \ldots, X_r, Y_1, \ldots, Y_s) = (-x_1, x_2, \ldots, x_n, X_1, \ldots, X_r, -Y_1, \ldots, -Y_s)$. On a alors $\sigma(x_1, \ldots, x_n) = (-x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Le quotient de $\mathbb{R}^n$ par σ dans la catégorie des variétés différentielles est la variété $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n-1}$ et l'application différentiable quotient est l'application $r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n-1}$ définie par $r(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1^2, x_2, \ldots, x_n)$. Le quotient de ξ par $\bar{\sigma}$ dans la catégorie des fibrés vectoriels différentiels et le morphisme quotient sont alors donnés par

$$\begin{array}{ccc} r_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s & \longrightarrow & (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n-1}) \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s \\ (x \ , X \ , Y) & \longmapsto & (\ r(x) \quad , \ X \ , x_1 Y) \end{array}$$

b) On suppose que σ n'ait pas de point fixe. On note $E(\xi)$ l'espace total du fibré ξ et on considère le quotient $E(\xi)/\bar{\sigma}$ dans la catégorie des ensembles ainsi que l'application quotient $r_1 : E(\xi) \to E(\xi)/\bar{\sigma}$. On munit $E(\xi)/\bar{\sigma}$ de l'unique structure de fibré vectoriel différentiel de base X/σ faisant de r_1 un morphisme de fibrés vectoriels et un difféomorphisme local. $E(\xi)/\bar{\sigma}$ est alors le quotient de ξ par $\bar{\sigma}$ dans la catégorie des fibrés vectoriels différentiels et r_1 le morphisme quotient.

c) Le cas général se déduit des cas précédents par recollement.

c.q.f.d.

Munissons le fibré vectoriel produit $\tilde{W} \times \mathbb{R}$ de base $\tilde{W}$ de l'involution σ_1 définie par $\sigma_1(x,a) = (\sigma(x), -a)$. On note ω^1 le 1-fibré vectoriel quotient de $\tilde{W} \times \mathbb{R}$ par σ_1 dans la catégorie des fibrés vectoriels différentiels. Ce quotient existe d'après le lemme 1.2.1.. Le morphisme quotient $r_1 : \tilde{W} \times \mathbb{R} \to \omega^1$ est au-dessus de l'application quotient $r : \tilde{W} \to W$.

L'application $r : \tilde{W} \to W$ se relève en un plongement $i : \tilde{W} \to E(\omega^1)$ défini par $i(x) = r_1(x,1)$.

1.3. La paire topologique $(\mathcal{C}_f, \partial W)$.

On note $\mathcal{M}(f)$ le mapping cylinder de l'application continue $f : V \to M$. On note $\Omega(\mathcal{M}(f) ; V)$ l'espace des applications continues

$$c : ([-1, 1], \{-1, 1\}) \to (\mathcal{M}(f), V)$$

muni de la topologie de la convergence uniforme. On note $e : \Omega(\mathcal{M}(f) ; V) \to V \times V$ l'application continue définie par $e(c) = (c(-1), c(1))$.

Soit $S(\omega)$ le fibré en sphères associé à ω. C'est un revêtement à deux feuillets de base W. L'application quotient $r : \tilde{W} \to W$ se relève en un plongement $i : \tilde{W} \to E(\omega)$ (voir 1.2.) ; cela montre que l'on a une application continue naturelle $\ell : S(\omega) \to \tilde{W}$. On considère l'application $\mu \circ \ell : S(\omega) \to V \times V$.

On définit l'espace $\mathcal{C}_f$ comme le quotient du produit fibré de $S(\omega)$ et de $\Omega(\mathcal{M}(f) ; V)$ au-dessus de $V \times V$ par la relation qui identifie (x,c) et $(-x, c^{-1})$, c^{-1} étant le chemin défini par $c^{-1}(u) = c(-u)$ pour $u \in [-1, 1]$. On peut identifier V au sous-espace de $\Omega(\mathcal{M}(f) ; V)$ formé des chemins constants. Le quotient de $S(\omega|\partial W) \underset{V\times V}{\times} V$ est un sous-espace de $\mathcal{C}_f$ que l'on identifie à ∂W.

L'application $e : \Omega(\mathcal{M}(f) ; V) \to V \times V$ est un fibré de Serre. Par suite la projection $pr_1 : S(\omega) \underset{V\times V}{\times} \Omega(\mathcal{M}(f) ; V) \to S(\omega)$ est un fibré de Serre. On note $p : \mathcal{C}_f \to W$ l'application continue obtenue à partir de pr_1 par passage au quotient. C'est un fibré de Serre. Si M est connexe, la fibre est l'espace ΩM des lacets de M issus d'un point donné, muni de la topologie de la convergence uniforme.

Remarque 1.3.1. Lorsque l'application $f : V \to M$ est un plongement, on peut considérer un espace $\mathcal{C}'_f$ défini de la même manière que l'espace $\mathcal{C}_f$ en remplaçant $\Omega(\mathcal{M}(f) ; V)$ par $\Omega(M ; f(V))$. Les espaces $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}'_f$ ont alors le même type d'homotopie.

On note $\bar{\Omega}(\mathcal{M}(f) ; V)$ le sous-espace de $\Omega(\mathcal{M}(f) ; V)$ formé des chemins

c satisfaisant à

$$c(u) = (c(-1),\ 2(1+u)),\quad -1 \leqslant u \leqslant -\tfrac{1}{2}$$

$$c(u) = (c(1),\ 2(1-u)),\quad \tfrac{1}{2} \leqslant u \leqslant 1$$

$$c(u) \in M \subset \mathscr{M}(f) \quad ,\quad -\tfrac{1}{2} \leqslant u \leqslant \tfrac{1}{2}\ .$$

A l'espace $\overline{\Omega}(\mathscr{M}(f)\ ;\ V)$ est associé un sous-espace $\overline{\mathscr{C}}_f$ de $\mathscr{C}_f$. L'inclusion $\overline{\mathscr{C}}_f \subset \mathscr{C}_f$ est une équivalence d'homotopie.

Soient f et g deux applications continues de V^n dans M^m. Soit $h = (h_\lambda)_{\lambda \in I}$ une homotopie de f dans g. On considère une application de $\overline{\Omega}(\mathscr{M}(g)\ ;\ V)$ dans $\overline{\Omega}(\mathscr{M}(f)\ ;\ V)$ qui au chemin c associe le chemin c_1 défini par

$$c_1(u) = \begin{cases} h_{2(1+2u)}(c(-1)) & ,\ -\tfrac{1}{2} \leqslant u \leqslant -\tfrac{1}{4} \\ c(4u) & ,\ -\tfrac{1}{4} \leqslant u \leqslant \tfrac{1}{4} \\ h_{2(1-2u)}(c(1)) & ,\ \tfrac{1}{4} \leqslant u \leqslant \tfrac{1}{2} \end{cases}$$

Cette application continue induit une application continue $\overline{H}(h) : \overline{\mathscr{C}}_g \to \overline{\mathscr{C}}_f$ qui est une équivalence d'homotopie, son inverse à homotopie près étant $\overline{H}(h^{-1})$, h^{-1} étant l'homotopie de g dans f définie par $h^{-1} = (h_{(1-\lambda)})_{\lambda \in I}$.

Les inclusions $\overline{\mathscr{C}}_f \subset \mathscr{C}_f$, $\overline{\mathscr{C}}_g \subset \mathscr{C}_g$ étant des équivalences d'homotopie, on en déduit une équivalence d'homotopie $H(h) : \mathscr{C}_g \to \mathscr{C}_f$ bien définie à homotopie près. On peut même prendre $H(h)$ de façon que $H(h)|\partial W = id(\partial W)$.

1.4. Le fibré vectoriel stable θ_f.

On définit une application continue $q : \mathscr{C}_f \to M$ par passage au quotient de l'application composée

$$S(\omega) \underset{V\times V}{\times} \Omega(\mathscr{M}(f)\ ;\ V) \xrightarrow{pr_2} \Omega(\mathscr{M}(f)\ ;\ V) \longrightarrow \mathscr{M}(f) \to M$$
$$c \longmapsto c(0)$$

On note $P = p \times q : \mathcal{C}_f \to W \times M$.

Pour N entier suffisamment grand, on suppose que $(W,\partial W)$ est une sous-variété de (D^N, S^{N-1}) et que $W \pitchfork S^{N-1} = \partial W$. On note $\nu(W)^{N-2n}$ un fibré normal à $(W,\partial W)$ dans (D^N, S^{N-1}) .

On note $\theta_N = (\omega^1 \otimes \tau M^m) \oplus (\nu(W)^{N-2n} \times M)$, fibré vectoriel différentiel de base $W \times M$ et de rang $N+m-2n$. On note $\theta_{f,N} = P^*(\theta_N)$, fibré vectoriel de base $\mathcal{C}_f$ et de rang $N+m-2n$. On note θ_f (resp. θ) le fibré vectoriel stable associé à $\theta_{f,N}$ (resp. θ_N).

Avec les notations de 1.3., on peut choisir $H(h)$ de sorte que $P_f \circ H(h) = P_g$. [On note P_f l'application P associée à l'application continue f]. Par suite $H(h)^*(\theta_f) = \theta_g$.

2.- Définition de l'application α_k .

Soient V^n et M^m deux variétés, V^n étant compacte sans bord. On ne suppose aucune condition sur les entiers m et n autre que $m, n \geqslant 0$. Soit k un entier $\geqslant 0$. Soit $f = (f_t)_{t \in I^k} : V^n \times I^k \to M^m$ une famille différentiable d'applications de V^n dans M^m représentant $[f] \in \pi_k(\mathrm{Hom}(V^n, M^m), P\ell(V^n, M^m), f_o)$ pour $k \geqslant 1$ [resp. une application de V^n dans M^m pour $k = 0$].

On se propose de définir un élément

$$\alpha_k([f]) \in \Omega_{2n-m+k}(\mathcal{C}_{f_o}, \partial W ; \theta_{f_o}) .$$

Un tel élément sera représenté par une application normale (Δ, b, B) dans $(\mathcal{C}_{f_o}, \partial W ; \theta_{f_o})$, où

(a) $(\Delta,\partial\Delta)$ est une sous-variété compacte de D^{N+k}, de dimension $2n-m+k$, telle que $\Delta \pitchfork S^{N+k-1} = \partial\Delta$;

(b) $b : (\Delta,\partial\Delta) \to (\mathcal{C}_{f_o}, \partial W)$ est une application continue ;

(c) $B : \nu(\Delta) \to \theta_{f_o,N}$ est un morphisme strict au-dessus de b, où $\nu(\Delta)$ est un fibré normal à $(\Delta,\partial\Delta) \subset (D^{N+k}, S^{N+k-1})$.

On notera $b_o = p \circ b : \Delta \to W$, $p : \mathcal{C}_{f_o} \to W$ étant l'application continue définie au §1.3..

Dans les paragraphes suivants, on définira successivement Δ, b_o, b et B (noté aussi $B(f)$).

2.1. Définition de Δ et b_o.

D'après III.1.3., quitte à remplacer f par une famille voisine, on peut supposer la famille f excellente. $\mu : \tilde{W} \to V \times V$ étant l'application définie au §1.1., on considère l'application $h : \tilde{W} \times I^k \to M \times M$ définie par $h(x,t) = [f_t(pr_1 \circ \mu(x)), f_t(pr_2 \circ \mu(x))]$.

lemme 2.1.1. $\bar{h}^1(\Delta_M)$ est de la forme $D \cup (F_\sigma \times I^k)$, où D^{2n-m+k} est une sous-variété compacte sans bord de $\tilde{W} \times \overset{\circ}{I}{}^k$, invariante par σ et transversale à $F_\sigma \times I^k$.

Démonstration. Si $(x,t) \in \bar{h}^1(\Delta_M) - F_\sigma \times I^k$, l'application h est transversale à Δ_M au point (x,t) car la famille f est excellente. Donc au voisinage de (x,t), $\bar{h}^1(\Delta_M)$ est une sous-variété de dimension $2n-m+k$.

Si $(x,t) \in F_\sigma \times I^k \subset \tilde{W} \times I^k$, l'application μ possède au voisinage de x une expression locale donnée par le germe à l'origine de

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$
$$(u\ ,\ \hat{v}\ ,\ a) \longmapsto (u-av,\ u+av)$$

où $u = (u_1, \ldots, u_n)$, $v = (1, v_2, \ldots, v_n)$, $\hat{v} = (v_2, \ldots, v_n)$.

Par suite $\bar{h}^1(\Delta_M) - F_\sigma \times I^k$ est donné au voisinage de (x,t) par

$$f_t(u+av) - f_t(u-av) = 0 \ .$$

L'application $f_t(u+av) - f_t(u-av)$ étant une application impaire de a, il existe un germe au point $(0,t)$, $g = (g_t)_{t\in I^k} : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}) \times I^k \to \mathbb{R}^m$ tel que

$$(1) \qquad f_t(u+av) - f_t(u-av) = a\, g_t(u,\hat{v},a^2) \ .$$

Donc au voisinage de (x,t), $\bar{h}^1(\Delta_M)$ coïncide avec la réunion de F_σ et d'un ensemble défini par $g_t(u,\hat{v},a^2) = 0$. Si $g_t(0) \neq 0$, il n'y a que F_σ . Si $g_t(0) = 0$, on a $g_t(u,\hat{v},a) = 2(f_t)_*(u,v)$ d'après (1). La famille f étant supposée correcte, l'ensemble défini par $g_t(u,\hat{v},a^2) = 0$ est une sous-variété de dimension $2n-m+k$ transversale à F_σ .

c.q.f.d.

L'involution $(x,t) \mapsto (\sigma(x),\ t)$ de $\tilde{W} \times I^k$ induit une involution de D notée σ_D , dont les points fixes forment une sous-variété fermée S de D de codimension 1. On note $\Delta = D/\sigma_D$, le quotient étant pris dans la catégorie des variétés différentielles ; on note $r : D \to \Delta$ l'application différentiable quotient (ses points singuliers sont des plis). Δ est une variété compacte de bord $\partial\Delta$ éventuellement vide.

On considère la projection $pr_1 : \tilde{W} \times I^k \to \tilde{W}$. L'application $pr_1|D : D \to \tilde{W}$ est compatible avec les involutions σ_D de D et σ de $\tilde{W}$, i.e. on a $\sigma \circ (pr_1|D) = (pr_1|D) \circ \sigma_D$. En passant au quotient, on obtient

une application différentiable $b_o : (\Delta,\partial\Delta) \to (W,\partial W)$. D étant transversal à $F_\sigma \times I^k$, b_o coupe ∂W transversalement et $\bar{b}_o^1(\partial W) = \partial\Delta$.

On note $j : D \to V$ l'application composée $D \subset \tilde{W} \times I^k \xrightarrow{pr_1} \tilde{W} \xrightarrow{\mu} V\times V \xrightarrow{pr_2} V$. D étant une sous-variété de $\tilde{W} \times I^k$ transversale à $F_\sigma \times I^k$, l'application j possède les propriétés suivantes :

(1) $j(d) \neq j(\sigma_D(d))$ si $d \notin S$;

(2) $j_*|\ker_d ((\sigma_D)_* + id)$ n'est pas nul pour $d \in S$.

On considère la projection $pr_2 : \tilde{W} \times I^k \to I^k$. L'application $pr_2|D : D \to I^k$ est telle que $(pr_2|D) \circ \sigma_D = pr_2|D$. Par passage au quotient l'application $pr_2|D$ induit une application différentiable notée $\tau : \Delta \to I^k$ (dont l'image $\tau(\Delta)$ est contenue dans $\overset{\circ}{I}{}^k = I^k - \partial I^k$).

D étant une sous-variété de $\tilde{W} \times I^k$ transversale à $F_\sigma \times I^k$, il en résulte que $b_o \times \tau : \Delta \to W \times I^k$ est un plongement. Δ peut être considéré comme une sous-variété de $W \times I^k$ et l'on a $\Delta \pitchfork (\partial W \times I^k) = \partial\Delta$.

2.2. Définition de l'application continue b.

Nous allons relever b_o dans $(\mathcal{C}_{f_o}, \partial W)$, c'est-à-dire définir une application continue

$$b : (\Delta,\partial\Delta) \to (\mathcal{C}_{f_o}, \partial W)$$

telle que $p \circ b = b_o$, $p : \mathcal{C}_{f_o} \to W$ étant l'application continue définie au §1.3..

On définit tout d'abord une application continue

$C = (c_d)_{d\in D} : D \to \Omega(\mathcal{M}(f_o) ; V)$ par

$c_d(u) = (j(\sigma(d)), 2(1+u)), -1 \leqslant u \leqslant -\frac{1}{2}$; $c_d(u) = f_{(1+2u)\tau(r(d))}(j(\sigma(d)))$, $-\frac{1}{2} \leqslant u \leqslant 0$;

$c_d(u) = (j(d), 2(1-u))$, $\frac{1}{2} \leqslant u \leqslant 1$; $c_d(u) = f_{(1-2u)\tau(r(d))}(j(d))$, $0 \leqslant u \leqslant \frac{1}{2}$.

Pour $d \in S$, on a $c(u) = c(-u)$, $u \in [-1, 1]$. L'application continue C est homotope à une application continue $C' = (c'_d)_{d \in D}$ telle que c'_d soit un chemin constant pour $d \in S$, $e \circ C' = e \circ C$, e étant défini au §1.3.. C' permet de relever l'application b_o en une application continue :

$b : (\Delta, \partial\Delta) \to (\mathcal{C}_{f_o}, \partial W)$.

2.3. Définition du morphisme strict B .

L'application $h : \tilde{W} \times I^k \to M \times M$ définie en 2.1. est transversale à Δ_M en dehors de $F_\sigma \times I^k$. Par suite, si on note $\nu(W \times I^k ; \Delta)$ un fibré normal à $\Delta \subset W \times I^k$, l'application h induit un morphisme strict (défini à homotopie près)

$$U(f) : \nu(W \times I^k ; \Delta) \to \omega \otimes \tau M$$

au-dessus de $P \circ b : \Delta \to W \times M$, $P : \mathcal{C}_{f_o} \to W \times M$ étant défini en 1.3..

Au §1.4., on a supposé $W \subset D^N$, $W \pitchfork S^{N-1} = \partial W$. On a donc $\Delta \subset W \times I^k \subset D^N \times I^k$ et par suite

$$\nu(\Delta)^{m-2n+N} = \nu(W \times I^k ; \Delta)^m \oplus [\nu(W)^{N-2n} \times I^k]|\Delta .$$

En suspendant $U(f)$, on obtient donc un morphisme strict

$$B_o(f) : \nu(\Delta)^{m-2n+N} \to \theta_N$$

au-dessus de $P \circ b : \Delta \to W \times M$.

Le fibré vectoriel $\theta_{f_o, N}$ étant le fibré $P^*(\theta_N)$, le morphisme strict B_o se relève en un morphisme strict

$$B(f) : \nu(\Delta)^{m-2n+N} \to \theta_{f_o, N}$$

au-dessus de $b : \Delta \to \mathcal{C}_{f_o}$.

2.4. Définition de l'application α_k pour $k \geqslant 1$.

Soient $f = (f_t)_{t\in I^k}$ et $g = (g_t)_{t\in I^k}$ deux familles excellentes d'applications de V^n dans M^m représentant le même élément de $\pi_k(\mathrm{Hom}(V^n,M^m),P\ell,f_o)$ pour $k \geqslant 1$. D'après III. prop. 1.2.1., il existe une homotopie excellente $h = (h_{t,\lambda})_{t\in I^k,\lambda\in I}$ de f dans g [i.e. telle que l'application $h' : V^n \times I^k \times I \to M^m \times I^k \times I$ définie par $h'(x,t,\lambda) = (h_{t,\lambda}(x),t,\lambda)$ soit excellente].

A la famille f est associée au §2.3. une application normale $B(f)$. De la même manière on associe à h un cobordisme normal $B(h)$ entre les applications normales $B(f)$ et $B(g)$. $B(f)$ et $B(g)$ représentent donc le même élément de $\Omega_{2n-m+k}(\mathcal{C}_{f_o},\partial W ; \theta_{f_o})$. Pour $k \geqslant 1$, on peut donc définir une application

$$\alpha_k : \pi_k(\mathrm{Hom}(V^n,M^m),\ P\ell,\ f_o) \longrightarrow \Omega_{2n-m+k}(\mathcal{C}_{f_o},\partial W ; \theta_{f_o})$$

par $\alpha_k([f]) = [B(f)]$.

Proposition 2.4.1.- Pour $k \geqslant 1$ on pointe l'ensemble $\pi_k(\mathrm{Hom}(V^n,M^m),\ P\ell,\ f_o)$ par $*$, classe d'une famille constante. Alors on a $\alpha_k(*) = 0$; autrement dit, α_k est un morphisme d'ensembles pointés. Pour $k \geqslant 2$, α_k est un homomorphisme de groupes.

Démonstration. Si $f = (f_t)_{t\in I^k}$ est une famille de plongements, on a $\Delta = \emptyset$, d'où $\alpha_k(*) = 0$. Les définitions des structures de groupes de $\pi_k(\mathrm{Hom}(V^n,M^m),\ P\ell,\ f_o)$ pour $k \geqslant 2$ et de $\Omega_{2n-m+k}(\mathcal{C}_{f_o},\partial W ; \theta_{f_o})$ montrent immédiatement que α_k est un homomorphisme de groupes pour $k \geqslant 2$.

c.q.f.d.

Proposition 2.4.2.- Si $\alpha_1^{-1}(0) = \{*\}$ pour tout point de base $f_o \in P\ell(V^n, M^m)$, alors α_1 est injective.

Démonstration. Soient $c = (c_\lambda)_{\lambda \in I}$ et $c' = (c'_\lambda)_{\lambda \in I} : (I, \{0,1\}, 0) \to (\mathrm{Hom}(V^n, M^m), P\ell, f_o)$ deux chemins excellents. On définit un chemin $C : (I, \{0,1\}, 0) \to (\mathrm{Hom}(V^n, M^m), P\ell, c_1)$ par

$$C(\lambda) = c(1-2\lambda) \quad , \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant \tfrac{1}{2} \, ,$$

$$C(\lambda) = c'(-1+2\lambda), \quad \tfrac{1}{2} \leqslant \lambda \leqslant 1 \, .$$

Quitte à modifier c et c' au voisinage de $\lambda = 0$, C est un chemin excellent d'origine c_1.

On suppose $\alpha_1([c]) = \alpha_1([c'])$; autrement dit $B(c)$ et $B(c')$ cobordent normalement. On en déduit que $B(C)$ est un bord. Comme par hypothèse $\alpha_1^{-1}(0) = *$ pour le point de base c_1, C est homotope rel $\{0,1\}$ à un chemin de plongements. Cela entraîne que les chemins c et c' sont homotopes. Autrement dit $[c] = [c'] \in \pi_1(\mathrm{Hom}(V^n, M^m), P\ell, f_o)$.

c.q.f.d.

2.5. Définition de l'application α_o.

Si l'application $f : V^n \to M^m$ est excellente, on lui associe $\alpha_o(f) = [B(f)] \in \Omega_{2n-m}(\mathcal{C}_f, \partial W ; \theta_f)$. Supposons maintenant que l'on ait une application différentiable quelconque $f : V^n \to M^m$. Soient g une application excellente de V^n dans M^m et h une homotopie de f dans g. Aux §1.3. et 1.4. on a associé à h une équivalence d'homotopie $H(h) : (\mathcal{C}_g, \partial W) \to (\mathcal{C}_f, \partial W)$ telle que $\theta_g = H(h)^*(\theta_f)$. On pose $\alpha_o(f) = H(h)_*(\alpha_o(g)) \in \Omega_{2n-m}(\mathcal{C}_f, \partial W ; \theta_f)$ et l'on montre que $\alpha_o(f)$ ne dépend

que de f . On a alors la proposition suivante :

Proposition 2.5.1.- Si f est homotope à un plongement, on a $\alpha_o(f) = 0$.

Lorsque $M^m = \mathbb{R}^m$, on pose $\alpha_o(V^n,m) = [B_o(f)] \in \Omega_{2n-m}(W,\partial W ; \theta)$. $\alpha_o(V^n,m)$ joue le même rôle que $\alpha_o(f)$ puisque dans ce cas l'application $p : (\mathcal{C}_f,\partial W) \to (W,\partial W)$ est une équivalence d'homotopie.

D'après II.6.4. on a $\alpha_o(V^n,m) = \bar{\sigma}(m\omega)$. Le fibré $m\omega$ est quotient du fibré produit $S(\omega) \times \mathbb{R}^m$ par l'involution $(x,a) \to (-x, -a)$. D'après II.6.5., on a donc :

Proposition 2.5.2.- $\alpha_o(V^n,m)$ est un élément du groupe $\Omega_{2n-m}(W,\partial W ; \theta)$ dont l'ordre est une puissance de 2 .

2.6. Cas où l'on considère une famille parfaite.

On suppose que la famille $f = (f_t)_{t\in I^k}$ est parfaite (cf. III.3.). Dans ce cas l'application $j \times (\tau \circ r) : D^{2n-m+k} \longrightarrow V^n \times I^k$ est un plongement qui permet d'identifier D à une sous-variété de $V^n \times I^k$. L'ensemble S des points fixes de σ_D est alors l'ensemble des points singuliers de f' . $f'|S$ est un plongement.

On a un plongement $\Delta \to M \times I^k$ défini par la diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{r} & \Delta \\ {\scriptstyle j\times(\tau\circ r)}\downarrow & & \downarrow \\ V^n \times I^k & \xrightarrow{f'} & M^m \times I^k \end{array}$$

Δ s'identifie donc à une sous-variété de $M^m \times I^k$. L'intérieur de Δ est formé des points doubles de f' . Son bord est $f'(S)$. On a de plus $D = \bar{f}^1(\Delta)$.

3.- Enoncé du résultat fondamental.

On se propose au chapitre V de démontrer le théorème suivant qui constitue le résultat fondamental de ce travail.

Théorème A.- Soient V^n et M^m deux variétés différentielles de classe C^∞, la variété V^n étant compacte sans bord.

Soit $f : V^n \to M^m$ une application continue. Si $2m-3n-3 \geqslant 0$, f est homotope à un plongement si et seulement si $\alpha_o(f)$ est l'élément neutre du groupe $\Omega_{2n-m}(\mathcal{C}_f, \partial W ; \theta_f)$.

Soient k un entier $\geqslant 1$ et $f_o : V^n \to M^m$ un plongement. L'homomorphisme (application pointée si $k = 1$).

$\alpha_k : \pi_k(\mathrm{Hom}(V^n, M^m), P\ell, f_o) \longrightarrow \Omega_{2n-m+k}(\mathcal{C}_{f_o}, \partial W ; \theta_{f_o})$ est un isomorphisme (bijection si $k = 1$) pour $k \leqslant 2m-3n-3$, un épimorphisme (surjection si $k = 1$) pour $k = 2m-3n-2$.

Le domaine $0 \leqslant k \leqslant 2m-3n-3$ s'appelle le domaine métastable. Il contient le domaine stable $0 \leqslant k \leqslant m-2n-1$. De l'énoncé précédent, on déduit immédiatement le même énoncé en classe C^r, $r \geqslant 1$. Cela tient à ce que toute variété de classe C^r, $r \geqslant 1$, peut être munie d'une structure de classe C^∞, et tout plongement de classe C^r peut être approché par un plongement de classe C^∞.

Lorsque la variété M^m est l'espace euclidien $\mathbb{R}^m$, le théorème A s'énonce de la façon suivante :

Théorème B.- Soit V^n une variété différentielle de classe C^∞ compacte sans

bord. Si $2m-3n-3 \geqslant 0$, il existe un plongement de V^n dans $\mathbb{R}^m$ si et seulement si l'élément (dont l'ordre est une puissance de 2) $\alpha_o(V^n,m)$ est l'élément neutre du groupe $\Omega_{2n-m}(W,\partial W ; m\omega \oplus \nu W)$. Soient j un entier $\geqslant 0$ et $f_o : V^n \to \mathbb{R}^m$ un plongement. L'homomorphisme (application pointée si $j = 0$)

$$\alpha_{j+1} : \pi_j(\mathcal{P}\ell(V^n,\mathbb{R}^m),f_o) \longrightarrow \Omega_{2n-m+j+1}(W,\partial W ; m\omega \oplus \nu W)$$

est un isomorphisme (bijection si $j = 0$) pour $j \leqslant 2m-3n-4$, un épimorphisme (surjection si $j = 0$) pour $j = 2m-3n-3$.

On a vu au §2.5. que $\alpha_o(V^n,m) = \bar{\sigma}(m\omega)$. Comme $\bar{\sigma}(m\omega) = D(\sigma(m\omega))$, où D est la dualité de Poincaré, d'après II.6.2., lorsque $2m-2n-3 \geqslant 0$, $\alpha_o(V^n,m) = 0$ si et seulement si le fibré vectoriel $m\omega$ possède une section partout non nulle.

En II.1.2. on a noté $\Gamma^*(m\omega)$ l'espace des sections partout non nulles du fibré vectoriel $m\omega$, muni de la topologie de la convergence compacte. Si $f : V^n \to \mathbb{R}^m$ est un plongement, on peut lui associer l'application partout non nulle

$$\begin{array}{ccc} V^n \times V^n - \Delta_V & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ (x\ ,\ y) & \longmapsto & f(y)-f(x) \end{array}$$

et par suite un élément de $\Gamma^*(m\omega|W-\partial W) \simeq \Gamma^*(m\omega)$. On a donc un homomorphisme (application pointée pour $j = 0$) :

$$\delta : \pi_j(\mathcal{P}\ell(V^n,\mathbb{R}^m), f_o) \longrightarrow \pi_j(\Gamma^*(m\omega), s_o) .$$

D'après II.1.2., pour $0 \leqslant j \leqslant 2m-2n-4$, on a un isomorphisme suspension $S : \pi_j(\Gamma^*(m\omega), s_o) \xrightarrow{\simeq} \Omega^{m-j-1}(W ; m\omega)$. On considère aussi la dualité de Poincaré

$D : \Omega^{m-j-1}(W ; m\omega) \longrightarrow \Omega_{2n-m+j+1}(W,\partial W ; m\omega \oplus \nu W)$. On a la relation $\alpha_{j+1} = D \circ S \circ \delta$, de sorte que l'on peut énoncer le théorème B sous la forme duale suivante :

Théorème C.- Soit V^n une variété différentielle de classe C^∞ compacte sans bord. Si $2m-3n-3 \geqslant 0$, il existe un plongement de V^n dans $\mathbb{R}^m$ si et seulement si le fibré vectoriel $m\omega$ de rang m et de base W^{2n} possède une section partout non nulle. Soient j un entier $\geqslant 0$ et $f_o : V^n \to \mathbb{R}^m$ un plongement. L'homomorphisme (application pointée si $j = 0$)

$$\delta : \pi_j(\mathcal{P}\ell(V^n,\mathbb{R}^m), f_o) \longrightarrow \pi_j(\Gamma^*(m\omega), s_o)$$

est un isomorphisme (bijection si $j = 0$) pour $j \leqslant 2m-3n-4$, un épimorphisme (surjection si $j = 0$) pour $j = 2m-3n-3$.

CHAPITRE V : DEMONSTRATION DU RESULTAT FONDAMENTAL.

Dans ce chapitre, on se propose de démontrer le théorème A énoncé au chapitre IV. Tout d'abord, dans les §1 à 4, on démontre que le noyau de α_k est trivial pour $0 \leqslant k \leqslant 2m-3n-3$. Au §5 on déduit de la démonstration précédente la surjectivité de α_k pour $1 \leqslant k \leqslant 2m-3n-2$.

1.- Etude du noyau de α_k .

1.1. Soient V^n et M^m deux variétés, V^n étant compacte sans bord. Soit $f = (f_t)_{t\in I^k} : V^n \times I^k \to M^m$ une famille différentiable représentant $[f] \in \pi_k(\mathrm{Hom}(V^n,M^m), P\ell(V^n,M^m), f_o)$ pour $k \geqslant 1$ [resp. une application de V^n dans M^m pour $k = 0$]. Si $k \leqslant 2m-3n-1$, on peut supposer la famille f parfaite (cf. III.3.) . . Il lui est alors associé en IV.2. une application normale (Δ,b,B) où

(a) $(\Delta,\partial\Delta)$ est une sous-variété compacte du disque D^{N+k} , de dimension $2n-m+k$, telle que $\Delta \pitchfork S^{N+k-1} = \partial\Delta$, N étant un entier suffisamment grand ;

(b) $b : (\Delta,\partial\Delta) \to (\mathcal{C}_{f_o},\partial W)$ est une application continue ;

(c) $B : \nu^{N-m+2n}(\Delta) \to \theta_{f_o,N}$ est un morphisme strict au-dessus de b , où $\nu^{N-m+2n}(\Delta)$ est un fibré normal à $(\Delta,\partial\Delta) \subset (D^{N+k}, S^{N+k-1})$.

Cette application normale est un représentant de $\alpha_k([f])$. On note $b_o = p \circ b : \Delta \to W$, $p : \mathcal{C}_{f_o} \to W$ étant l'application continue définie en IV.1.3..

1.2. On suppose que $\alpha_k([f]) = 0$ et l'on veut montrer dans ce chapitre que, pour $0 \leqslant k \leqslant 2m-3n-3$, la classe $[f]$ est égale à $*$ (classe d'une famille constante) si $k \geqslant 1$, l'application f est homotope à un plongement si

$k = 0$. L'hypothèse $\alpha_k([f]) = 0$ se traduit par l'existence d'un triple (Δ', b', B') dans lequel

(a') $(\Delta', \partial\Delta')$ est une sous-variété compacte de $(D^{N+k} \times I, \partial(D^{N+k} \times I))$, de dimension $2n-m+k+1$, coupant $\partial(D^{N+k} \times I)$ et $S^{N+k-1} \times \{0,1\}$ transversalement et telle que $\Delta' \pitchfork (D^{N+k} \times \{0\}) = \Delta \times \{0\}$, $\Delta' \cap (D^{N+k} \times \{1\}) = \emptyset$; on note $U = \partial\Delta' \pitchfork S^{N+k-1} \times I$, variété compacte de bord $\partial U = \partial\Delta$;

(b') $b' : (\Delta, U) \to (\mathcal{C}_{f_c}, \partial W)$ est une application continue telle que $b'|\Delta = b$; on note $b'_o = p \circ b'$;

(c') $B' : \nu^{N-m+2n}(\Delta') \to \theta_{f_c, N}$ est un morphisme strict au-dessus de b' tel que $B'|\nu(\Delta) = B$, où $\nu(\Delta')$ est un fibré normal à $\Delta' \subset D^{N+k} \times I$ tel que $\nu(\Delta')|\Delta \times \{0\} = \nu(\Delta) \times \{0\}$

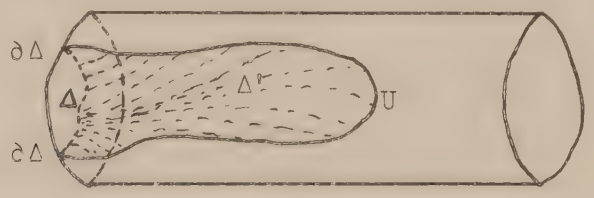


figure 3.

1.3. On remplace b'_o par une application différentiable voisine telle que b'_o coupe ∂W transversalement et $b'^{-1}_o(\partial W) = U = \partial\Delta' - \overset{\circ}{\Delta}$. Notons $r' : D' \to \Delta'$ l'image réciproque de $r : \tilde{W} \to W$ par $b'_o : \Delta' \to W$. D' est une variété compacte de bord D et $r'|D = r : D \to \Delta$ (cf. IV.2.1.).

L'involution σ de $\tilde{W}$ induit une involution $\sigma_{D'}$ de D' et $\sigma_{D'}|D = \sigma_D$. L'ensemble S' des points fixes de $\sigma_{D'}$ est une sous-variété de D' de codimension 1, et $S' \pitchfork D = S$.

L'application $D' \to \tilde{W}$ induit une application $j' : D' \to V$ lorsqu'on la compose avec $\tilde{W} \xrightarrow{\mu} V \times V \xrightarrow{pr_2} V$. On a $j'|D = j$ (cf. IV.2.1.) et j' possède les propriétés suivantes :

(1') $\quad j'(d) \neq j'(\sigma_{D'}(d))$ si $d \notin S'$;

(2') $\quad j'_*|\ker_d ((\sigma_{D'})_* + id)$ n'est pas nul pour $d \in S'$.

1.4. On note $f' : V \times I^k \to M \times I^k$ l'application définie par $f'(x,t)=(f(x,t),t)$. On note t (resp. t') la seconde projection de $V \times I^k$ (resp. $M \times I^k$).

La famille $f = (f_t)_{t \in I^k}$ est homotope rel ∂I^k à une famille de plongements si et seulement si l'application f' est homotope à un plongement par une homotopie h_s, $s \in I$, fixe sur $V^n \times \partial I^k$ et respectant les projections sur I^k (i.e. telle que $t' \circ h_s = t$ pour tout $s \in I$).

Pour déformer f' en un plongement de cette façon, on utilisera un modèle de déformation que l'on construira au §2 à partir des données (a'), (b').

2.- Construction d'un modèle de déformation.

On note Δ'_ε la variété Δ' prolongée le long de Δ par un collier $\Delta \times [0,\varepsilon]$, $\varepsilon > 0$; on prolonge de façon analogue D' en D'_ε ainsi que les applications $\sigma_{D'}$, r' et j' ...

Δ' est une sous-variété de $D^{N+k} \times I$ et $\Delta' \pitchfork D^{N+k} \times \{0\} = \Delta$. On note $\lambda = pr_2|\Delta'$ et l'on prolonge λ à Δ'_ε de façon que $-1 < \lambda(d) < 0$ pour $d \in \Delta \times]0,\varepsilon]$. 0 est alors une valeur régulière de λ et $\lambda^{-1}(0) = \Delta$.

On note $\omega_{\Delta'_\varepsilon}$ le quotient du 1-fibré vectoriel trivial $D'_\varepsilon \times \mathbf{R}$ par l'involution $(d,a) \to (\sigma_{D'}(d), -a)$, (cf. IV.1.2.1.). $\omega_{\Delta'_\varepsilon}$ s'identifie à $b_0^*(\omega)$

où ω est le 1-fibré vectoriel de base W défini en IV.1.2.. Le plongement $D'_\varepsilon \to D'_\varepsilon \times \mathbb{R}$ qui à $d \in D'_\varepsilon$ associe $(d,1)$ induit un plongement $i : D'_\varepsilon \to E(\omega_{\Delta'_\varepsilon})$.

Soit ξ un fibré vectoriel différentiel de base D'_ε. On note η le quotient du fibré vectoriel différentiel $\xi \underset{D'_\varepsilon}{\oplus} \sigma^*_{D'} \xi$ par l'involution $\bar{\sigma}$ définie par $\bar{\sigma}(x,y) = (-y, -x)$, (cf. IV.1.2.1.). η est un fibré vectoriel de base Δ'_ε. On note $\rho : \xi \to \eta$ la composition de l'injection naturelle $\xi \to \xi \underset{D'_\varepsilon}{\oplus} \sigma^*_{D'} \xi$ sur le premier facteur avec le morphisme quotient. Le morphisme ρ est au-dessus de $r' : D'_\varepsilon \to \Delta'_\varepsilon$.

On considère alors les applications

$$\begin{aligned} \gamma : D'_\varepsilon &\longrightarrow E(\omega_{\Delta'_\varepsilon}) \\ d &\longmapsto \lambda(r'(d))i(d) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma : E(\xi) &\longrightarrow E(\omega_{\Delta'_\varepsilon} \oplus \eta) \\ x_d &\longmapsto [\gamma(d), \rho(x_d)] \end{aligned}$$

On identifie D'_ε à la section nulle de $E(\xi)$.

lemme 2.1. Γ (resp. γ) est une application parfaite. Pour tout voisinage $\mathcal{V}$ de D' dans $E(\xi)$, Γ est homotope à un plongement par une homotopie Γ_s fixe en dehors de $\mathcal{V}$ et respectant la projection sur η.

La première partie du lemme se vérifie sans peine. Pour démontrer la seconde partie, on considère une fonction différentiable $\pi : E(\xi) \to [0,1]$ nulle en dehors de $\mathcal{V}$, égale à 1 sur D'. Il suffit de prendre

$$\Gamma_s(x_d) = [(\lambda(r'(d)) - \pi(x_d)s)\, i(d), \rho(x_d)] .$$

Dans la suite de ce chapitre, nous utiliserons Γ_s comme modèle de déformation.

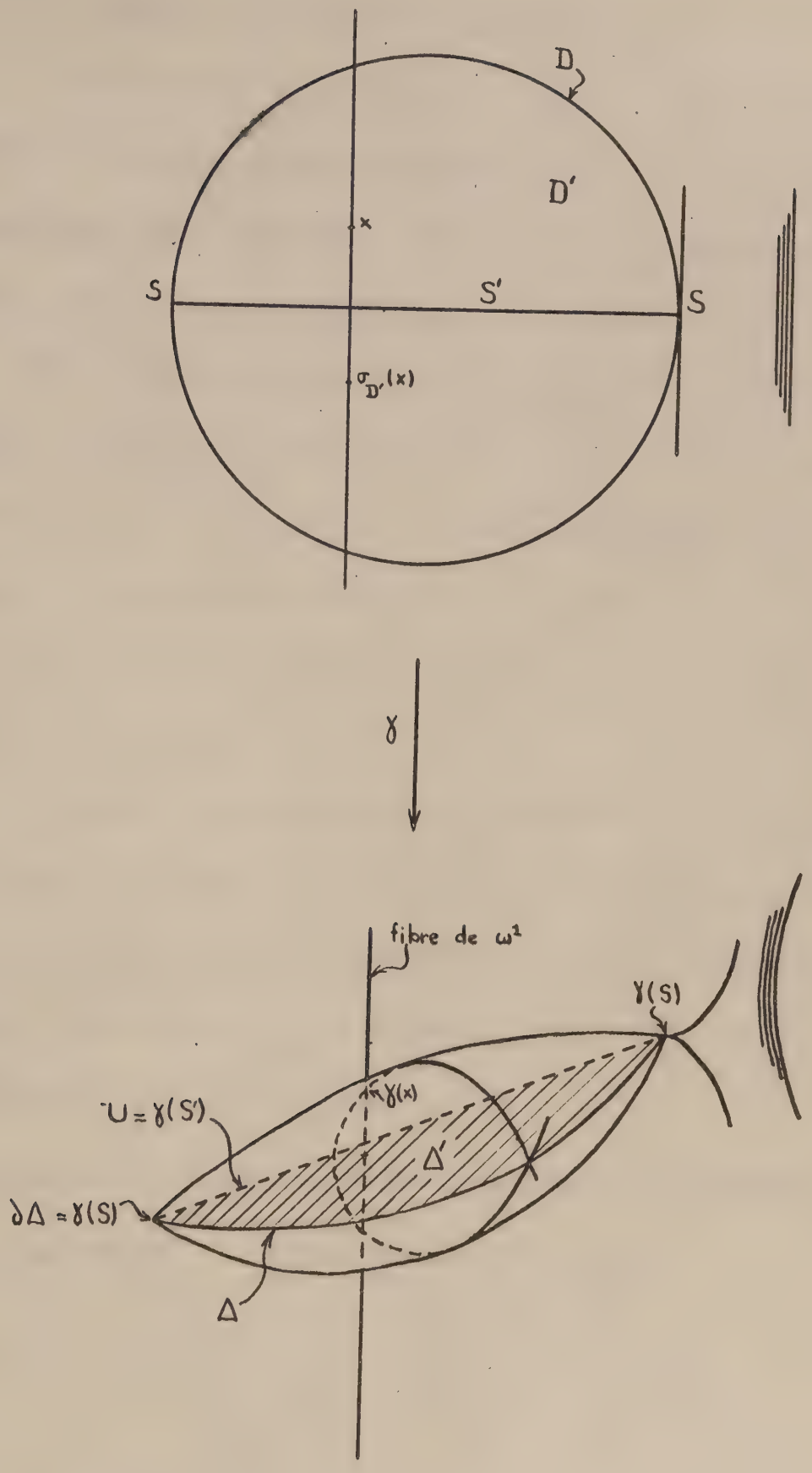

D
D'
x
S
S'
S
$\sigma_{D'}(x)$
γ
fibre de ω^2
$\gamma(S)$
$\gamma(x)$
$U = \gamma(S')$
Δ'
$\partial\Delta = \gamma(S)$
Δ

figure 4

3.- Première étape de la démonstration.

Quitte à remplacer la famille $f = (f_t)_{t \in I^k}$ par une famille voisine au sens C^∞, on peut supposer que l'application (cf. IV.2.1.) $\tau : \Delta \to I^k$ est excellente, que l'application $\tau|\partial\Delta : \partial\Delta \to I^k$ est excellente et que l'application $\tau|\Delta - \partial\Delta$ est transversale à $\tau|\partial\Delta$. En effet, Δ est une sous-variété de $M^m \times I^k$ (cf. IV.2.6.) et l'on a $\tau = t'|\Delta$. Il existe donc (cf. III prop. 1.2.1.) un difféomorphisme $\mathrm{rel}(M^m \times \partial I^k)$, $\zeta_1 : M \times I^k \circlearrowleft$, voisin de l'identité, tel que $t' \circ \zeta_1|\Delta : \Delta \to I^k$ ait les propriétés énoncées ci-dessus. On note ζ_2 le difféomorphisme de $V^n \times I^k$ défini par $\zeta_2(x,t) = (x, t' \circ \zeta_1(f_t(x),t))$. Il suffit alors de remplacer f' par $\zeta_1 \circ f' \circ \zeta_2^{-1}$.

On munit le fibré vectoriel $\omega_{\Delta'_\varepsilon}$ d'une structure euclidienne telle que l'image du plongement $i : D'_\varepsilon \to E(\omega_{\Delta'_\varepsilon})$ soit formée de vecteurs de longueur $\leqslant 1$. On note $E_2(\omega_{\Delta'_\varepsilon})$ le sous-espace de $E(\omega_{\Delta'_\varepsilon})$ formé des vecteurs de longueur $\leqslant 2$. On note p_ω la projection du fibré $\omega_{\Delta'_\varepsilon}$. On démontre dans ce paragraphe la proposition suivante :

Proposition 1.- Si $0 \leqslant k \leqslant 2m-3n-3$, il existe des plongements φ, ψ et une application τ' rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} D'_\varepsilon & \xrightarrow{\gamma} & E_2(\omega_{\Delta'_\varepsilon}) & \xrightarrow{p_\omega} & \Delta'_\varepsilon \\ \downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \downarrow{\scriptstyle\psi} & & \downarrow{\scriptstyle\tau'} \\ V^n \times I^k & \xrightarrow{f'} & M^m \times I^k & \xrightarrow{t'} & I^k \end{array}$$

et satisfaisant à

(i) $\varphi|D$ est l'inclusion de D dans $V^n \times I^k$ (et par suite $\psi|\Delta$ est

l'inclusion de Δ dans $M^m \times I^k$ et $\tau'|\Delta = \tau$) ;

(ii) si ξ est un fibré normal au plongement φ, le fibré vectoriel $f'^{!}_{*}(\xi) \cap \psi_*(\tau\, E_2(\omega_{\Delta'_\varepsilon}))$ est composé de vecteurs nuls ;

(iii) $f'(V^n \times I^k) \cap \psi(E_2(\omega_{\Delta'_\varepsilon})) = \psi \circ \gamma\,(D'_\varepsilon)$.

Soit $\tau' : \Delta'_\varepsilon \to I^k$ une application différentiable prolongeant $\tau : \Delta \to I^k$, dont l'image soit située dans l'intérieur de I^k . En généralisant III.prop. 1.2.1., on montre que, quitte à remplacer τ' par une application voisine au sens C^∞, égale à τ sur Δ, on peut supposer que τ' est excellente, $\tau'|U_\varepsilon$ excellente et que $\tau'|\Delta'_\varepsilon - U_\varepsilon$ est transversale à $\tau'|U_\varepsilon$.

3.1. Construction du plongement φ .

On va construire le plongement φ en utilisant le §1.3.. On cherche φ de la forme $j' \times \tau' \circ r' : D'_\varepsilon \to V^n \times I^k$. On va montrer qu'en remplaçant j' et τ' par des applications voisines au sens C^∞, sans les changer sur D et Δ, on peut imposer à φ d'être un plongement. Alors φ sera un plongement rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} D'_\varepsilon & \xrightarrow{r'} & \Delta'_\varepsilon \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \downarrow{\scriptstyle \tau'} \\ V^n \times I^k & \xrightarrow{t} & I^k \end{array}$$

et $\varphi|D$ sera l'inclusion de D dans $V^n \times I^k$ (condition (i)).

3.1.1. On impose à φ d'avoir pour restriction à un voisinage de D un plongement.

On considère sur D un champ v de vecteurs tangents à D' , transverses à D , tels que $\sigma_*(v_x) = v_{\sigma(x)}$ pour $x \in D$. Il existe sur D un champ

u voisin de $\varphi_*(v)$, de vecteurs tangents à $V^n \times I^k$, transverses à D et tels que $\langle dt, u_x \rangle = \langle dt, u_{\sigma(x)} \rangle$ pour $x \in D$. Un tel champ u peut être obtenu par position générale car $\dim(V^n \times I^k) \geqslant 2 \dim D+1$, i.e. $k \leqslant 2m-3n-1$. Ce champ u permet de modifier légèrement j' et τ' au voisinage de D et Δ, sans les changer sur D et Δ, de façon à avoir la propriété 3.1.1..

3.1.2. On impose à φ d'avoir pour restriction à un voisinage de $D \cup S'$ un plongement.

On modifie tout d'abord légèrement j' et τ', sans les changer sur D et Δ, de façon que la restriction de φ à $D \cup S'$ soit un plongement. Cela est possible par position générale car $\dim(V^n \times I^k) \geqslant 2 \dim S'+1$, i.e. $k \leqslant 2m-3n-1$.

D'après 1.3., pour chaque point $x \in S'$, $j'_*(\ker_x((\sigma_{D'})_* + \mathrm{id}))$ est un sous-espace vectoriel de dimension 1 de ${}^{\tau}{}_{j'(x)}V$. L'application $\tau' | S'$ étant correcte, moyennant la condition $k \leqslant 2m-3n-1$, on peut utiliser le lemme III.1.4.1. qui permet de modifier légèrement $j'_*(\ker_x((\sigma_{D'})_* + \mathrm{id}))$ de façon à avoir 3.1.2..

3.1.3. On impose à φ d'être un plongement.

Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} D'_\varepsilon & \xrightarrow{j' \times r'} & V \times \Delta'_\varepsilon \\ & \searrow^{\varphi} & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}(V) \times \tau'} \\ & & V \times I^k \end{array}$$

$j' \times r'$ est un plongement d'après 1.3.. φ est un plongement au voisinage

de $D \cup S'$. L'application τ' est excellente, il en est donc de même de l'application $id(V) \times \tau'$. Vues les propriétés de l'application τ' , la condition (c') du lemme III.1.4.2. est vérifiée. Si $k \leqslant 2m-3n-3$, on peut donc approcher $j' \times r'$ par g tel que $(id(V) \times \tau') \circ g : D'_\varepsilon \to V \times I^k$ soit un plongement, g égal à $j' \times r'$ au voisinage de $D \cup S'$.

Mais $r' | D' - S'$ est une submersion. Il existe donc (quitte à diminuer ε) un difféomorphisme $\zeta : D'_\varepsilon \circlearrowleft$ voisin de l'identité et égal à l'identité au voisinage de $D \cup S'$, tel que $pr_2 \circ g \circ \zeta = r'$. Il suffit alors de remplacer j' par $pr_1 \circ g \circ \zeta$ pour avoir 3.1.3..

3.2. Construction du plongement ψ .

On va construire le plongement ψ en utilisant les données (b) et (b') du §1. Ces données fournissent une application continue $L : E_2(\omega_{\Delta'_\varepsilon}) \to M^m$ telle que $L \circ \gamma = f \circ \varphi$. Notons $\psi = L \times (\tau' \circ p_\omega) : E_2(\omega_{\Delta'_\varepsilon}) \to M^m \times I^k$. On va montrer que, quitte à remplacer l'application L par une application différentiable homotope, sans la changer sur $\gamma(D'_\varepsilon)$, ψ est un plongement ayant les propriétés indiquées dans l'énoncé de la proposition 1.

3.2.1. On impose à ψ d'avoir pour restriction à un voisinage de $\gamma(D'_\varepsilon)$ un plongement.

En utilisant la propriété universelle des points singuliers de type $\Sigma^{1,0}$ (cf. III lemme 2.1.), on montre que l'on peut remplacer L par une application différentiable voisine et qu'alors la restriction de ψ à un voisinage de Δ est un plongement.

Soit v un champ de vecteurs transverses à $\gamma(D'_\varepsilon - D)$ dans $E_2(\omega_{\Delta'_\varepsilon})$. On construit le long de $\psi \circ \gamma(D'_\varepsilon - D)$ un champ v' de vecteurs transverses à $f'(V^n \times I^k)$ tels que $\langle dt', v'_{\psi\gamma(x)} \rangle = \langle d(\tau' \circ p_\omega), v_{\gamma(x)} \rangle$, $x \in D'_\varepsilon - D$, voisin du champ $\psi_*(v)$ et égal à $\psi_*(v)$ au voisinage de Δ . Cela revient à approcher une section d'un $(m-n)$-fibré vectoriel différentiel de base une $(2n-m+k+1)$-variété par une section partout non nulle, ce qui est possible par position générale car $k \leqslant 2m-3n-2$. Les champs v et v' permettent alors de modifier L au voisinage de $\gamma(D'_\varepsilon - D)$ pour avoir 3.2.1..

3.2.2. On impose à ψ d'avoir pour restriction à chaque fibre de $E_2(\omega_{\Delta'_\varepsilon})$ un plongement.

L'application $L : E_2(\omega_{\Delta'_\varepsilon}) \to M^m$ peut être regardée au-dessus d'un voisinage de chaque point de Δ'_ε comme une famille à $\dim \Delta'_\varepsilon$ paramètres d'applications d'un segment dans M^m . Par suite, si $\dim M \geqslant \dim \Delta' + 2$, i.e. $k \leqslant 2m-2n-3$, on peut remplacer L par une application homotope, sans changer L au voisinage de $\gamma(D'_\varepsilon)$, de façon que $L \times p_\omega : E_2(\omega_{\Delta'_\varepsilon}) \to M^m \times \Delta'_\varepsilon$ soit un plongement.

3.2.3. On impose à ψ d'être un plongement.

On note A la région fermée de $E_2(\omega_{\Delta'_\varepsilon})$ limitée par $\gamma(D')$ et B la région fermée extérieure à $\gamma(D')$. $A \cap B = \gamma(D')$. Quitte à réduire ε , d'après 3.2.1., on peut modifier L pour que la restriction de ψ à un voisinage de B soit un plongement.

Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} E_2(\omega_{\Delta'_\varepsilon}) & \xrightarrow{L\times p_\omega} & M \times \Delta'_\varepsilon \\ & \searrow^{\psi} & \downarrow{\scriptstyle id(M)\times\tau'} \\ & & M \times I^k \end{array}$$

$L \times p_\omega$ est un plongement d'après 3.2.2.. L'application τ' est excellente, il en est donc de même de l'application $id(M) \times \tau'$. L'application τ' étant excellente, la condition (c') du lemme III.1.4.2. est vérifiée. Par suite, si $\dim(M \times I^k) \geqslant 2 \dim E_2(\omega_{\Delta'_\varepsilon}) + 1$, i.e. $k \leqslant 3m-4n-5$, il existe un plongement G voisin de $L \times p_\omega$, égal à $L \times p_\omega$ au voisinage de B et tel que $(id(M) \times \tau') \circ G$ soit un plongement.

Mais p_ω est une submersion. Il existe donc un difféomorphisme $\zeta : E_2(\omega_{\Delta'_\varepsilon}) \hookleftarrow$ voisin de l'identité, égal à l'identité au voisinage de B , tel que $pr_2 \circ G \circ \zeta = p_\omega$. Il suffit alors de remplacer L par $pr_1 \circ G \circ \zeta$ pour avoir 3.2.3..

3.2.4. On impose à ψ de satisfaire à la condition (iii).

La condition (iii) est équivalente à $\psi(E_2(\omega_{\Delta'_\varepsilon}) - \gamma(D'_\varepsilon)) \cap f'(V \times I^k) = \emptyset$. Quitte à diminuer ε , on peut supposer que l'on a $\psi(B-\gamma(D'_\varepsilon)) \cap f'(V \times I^k) = \emptyset$. D'après le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} A-\gamma(D') & \xrightarrow{L^\circ} & M \times (A-\gamma(D')) \\ & \searrow^{\psi} & \downarrow{\scriptstyle id(M)\times(\tau'\circ p_\omega)} \\ & & M \times I^k \end{array}$$

la condition (iii) est équivalente à la condition

$$L^\circ(A-\gamma(D')) \cap \overbrace{[id(M) \times (\tau' \circ p_\omega)]}^{-1} [f'(V \times I^k)] = \emptyset .$$

Or l'application $id(M) \times (\tau' \circ p_\omega)$ est transversale à $f'(V \times I^k)$, donc

$\overline{[id(M) \times (\tau' \circ p_\omega)^{-1}]}[f'(V \times I^k)]$ est une sous-variété de $M \times (A - \gamma(D'))$ de codimension $(m-n)$. D'après le lemme de transversalité, si $\dim(A - \gamma(D')) \leqslant m-n-1$, i.e. $k \leqslant 2m-3n-3$, on peut modifier légèrement l'application L sur $E(\omega_{\Delta'_\varepsilon})$, sans la changer au voisinage de B, pour que ψ satisfasse à la condition (iii).

4.- Deuxième étape de la démonstration.

On note ξ un fibré normal au plongement $\varphi : D'_\varepsilon \to V^n \times I^k$. Au §2. on a associé au fibré ξ un fibré η de base Δ'_ε. On met sur le fibré η une structure euclidienne. Dans ce paragraphe, on se propose de démontrer la proposition suivante :

Proposition 2.- Si $0 \leqslant k \leqslant 2m-3n-3$, il existe un voisinage ouvert U de $E_2(\omega_{\Delta'_\varepsilon})$ dans $E_2(\omega_{\Delta'_\varepsilon} \oplus \eta)$, des plongements Φ et Ψ, et une application T affine sur chaque fibre, rendant commutatif le diagramme (P) suivant

$$\begin{array}{ccccc} \Gamma^{-1}(U) & \xrightarrow{\Gamma|\Gamma^{-1}(U)} & U & \xrightarrow{pr_2|U} & E(\eta) \\ \downarrow \Phi & & \downarrow \Psi & & \downarrow T \\ V^n \times I^k & \xrightarrow{f'} & M^m \times I^k & \xrightarrow{t'} & I^k \subset R^k \end{array}$$

et satisfaisant à

(j) $\Phi|D$ est l'inclusion de D dans $V^n \times I^k$ (et par suite $\Psi|\Delta$ est l'inclusion de Δ dans $M^m \times I^k$ et $T|\Delta = \tau$) ;

(jj) $f'(V^n \times I^k) \cap \Psi(U) = \Psi \circ \Gamma(\Gamma^{-1}(U))$.

De la proposition 2 et du lemme 2.1., il résulte que f' est homotope rel $V^n \times \partial I^k$ à un plongement par une homotopie respectant les projections sur I^k. D'après 1.4., cela achève de démontrer 1.2..

4.1. Construction de Φ et de T .

On prend $\Phi|D'_\varepsilon = \varphi$. ξ étant un fibré normal à $\varphi(D'_\varepsilon)$ dans $V^n \times I^k$, il existe un voisinage ouvert U de $E_2(\omega_{\Delta'_\varepsilon})$ dans $E_2(\omega_{\Delta'_\varepsilon} \oplus \eta)$ tel que le plongement $\varphi : D'_\varepsilon \to V^n \times I^k$ se prolonge en un plongement $\Phi : \bar{\Gamma}^1(U) \to V^n \times I^k$ avec $t \circ \Phi : \bar{\Gamma}^1(U) \to I^k$ application affine sur chaque fibre de ξ . La condition (i) de la proposition 1 entraîne la condition (j) de la proposition 2.

Au §2., nous avons défini une application linéaire fibrée $\rho : \xi \to \eta$. On note $T : E(\eta) \to \mathbb{R}^k$ l'unique application affine sur chaque fibre rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \bar{\Gamma}^1(U) & \xrightarrow{\rho} & E(\eta) \\ \Phi \downarrow & & T \downarrow \\ V^n \times I^k & \xrightarrow{t} & I^k \subset \mathbb{R}^k \end{array}$$

On a $T|\Delta'_\varepsilon = \tau'$ et T est une application de rang k .

4.2. Construction de Ψ sur $E_2(\omega_{\Delta'_\varepsilon})$ et sur un voisinage de Δ .

On définit déjà Ψ sur $E_2(\omega_{\Delta'_\varepsilon})$ par $\Psi|E_2(\omega_{\Delta'_\varepsilon}) = \phi$. Pour achever de démontrer la proposition 2, il suffit, quitte à réduire U , de prolonger ϕ en un plongement Ψ de U dans $M^m \times I^k$ rendant commutatif le diagramme (P) de la proposition 2.. En effet, les conditions (ii) et (iii) de la proposition 1 entraînent alors la condition (jj) de la proposition 2.

La commutativité du diagramme (P) définit déjà Ψ sur $\Gamma(\bar{\Gamma}^1(U)) \cup E_2(\omega_{\Delta'_\varepsilon})$. En utilisant la propriété universelle des points singuliers de type $\Sigma^{1,0}$ (cf. III lemme 2.1.), on montre qu'il existe un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de Δ dans U tel que Ψ déjà défini sur $\Gamma(\bar{\Gamma}^1(U)) \cup E_2(\omega_{\Delta'_\varepsilon})$ se

prolonge à $\mathcal{V}$ en un plongement rendant commutatif le diagramme (P).

4.3. Extension de la restriction de Ψ_* à un voisinage de Δ dans Δ'_ε en un morphisme strict

$\chi : \tau(U)|\Delta'_\varepsilon \to \tau(M \times I^k)|\psi(\Delta'_\varepsilon)$ au-dessus de $\psi|\Delta'_\varepsilon$, compatible avec les projections $(T \circ pr_2|U)_*$ et t'_* sur $I^k \times \mathbb{R}^k$.

L'inclusion $\Delta \subset W \times I^k$ se prolonge en un plongement $\Delta' \subset W \times I^k \times I$ induit par $\varphi : D' \to V \times I^k$ et $\lambda : \Delta' \to [0,1]$. On modifie légèrement b'_0 pour que ce plongement soit égal à $b'_0 \times \tau' \times \lambda$.

Les morphismes stricts $B_0(f) = P_* \circ B(f)$ et $B'_0 = P_* \circ B'$, où $P_* : \theta_{f_0} \to \theta$ est induit par $P : \mathcal{C}_{f_0} \to W \times M$, entrent dans le diagramme commutatif

$$
\begin{array}{ccc}
\nu^{N+m-2n}(\Delta) = \nu(W \times I^k ; \Delta) \oplus [\nu^{N-2n}(W) \times I^k]|\Delta & & \\
\Big\downarrow & \searrow^{B_0(f)} & \\
\nu^{N+m-2n}(\Delta') = \nu(W \times I^k \times I ; \Delta') \oplus [\nu^{N-2n}(W) \times I^k \times I]|\Delta' & \nearrow_{B'_0} & (\omega \otimes \tau M) \oplus (\nu^{N-2n}(W) \times M)
\end{array}
\tag{1}
$$

$B_0(f)$ d'après sa définition même respecte les projections sur $\nu(W)$. On peut remplacer B'_0 par un morphisme strict homotope rel $\nu(\Delta)$ et respectant les projections sur $\nu(W)$. En effet, l'obstruction se trouve dans les groupes $\pi_i(V_{N+m-2n, N-2n})$ pour $i \leqslant \dim \Delta'$, groupes qui sont triviaux pour $\dim \Delta' \leqslant m-1$, i.e. pour $k \leqslant 2m-2n-2$.

Le diagramme précédent induit alors le diagramme commutatif

$$
\begin{array}{ccc}
\nu(W \times I^k ; \Delta) & \xrightarrow{U(f)} & \omega \otimes \tau M \\
\Big\downarrow & & \\
(W \times I^k \times I ; \Delta') & \dashrightarrow &
\end{array}
\tag{2}
$$

Quitte à remplacer U' par un morphisme strict homotope, on peut supposer que U' est au-dessus de $b'_o \times (pr_1 \circ \psi|\Delta')$.

Le diagramme commutatif suivant (cf. §2.)

$$(3)\qquad \begin{array}{ccc} E(\xi) & \xrightarrow{\Gamma} & E(\omega \oplus \eta) \\ \downarrow{\scriptstyle id(E(\xi)) \times 0} & & \downarrow{\scriptstyle id(E(\omega \oplus \eta)) \times 0} \\ E(\xi) \times I & \xrightarrow{\Gamma'} & E(\omega \oplus \eta) \times I \\ (x_d\ ,\ s) & \longmapsto & (\Gamma_s(x_d),\ s\ ) \end{array}$$

induit d'après IV.2.3. le diagramme commutatif

$$(4)\qquad \begin{array}{ccc} \nu(W \times I^k\ ;\ \Delta) & \xrightarrow{U(\Gamma)} & \omega \otimes (\tau U)_o|\Delta \\ \downarrow & & \downarrow \\ \nu(W \times I^k \times I\ ;\ \Delta') & \xrightarrow{U(\Gamma')} & \omega \otimes (\tau U)_o|\Delta' \end{array}$$

On a noté $(\tau U)_o = \ker(T \circ pr_2|U)_*$.

Les diagrammes (2) et (4) induisent un morphisme strict χ_o au-dessus de $pr_1 \circ \psi|\Delta'$, entrant dans le diagramme commutatif

$$(5)\qquad \begin{array}{ccc} (\tau U)_o|\Delta & & \\ \downarrow & \searrow^{\Psi_*} & \\ & & \tau M \\ (\tau U)_o|\Delta' & \nearrow_{\chi_o} & \end{array}$$

Le morphisme strict χ_o se prolonge en un morphisme strict $\chi : (\tau U)|\Delta'_\varepsilon \longrightarrow \tau(M \times I^k)|\psi(\Delta'_\varepsilon)$ au-dessus de $\psi|\Delta'_\varepsilon$, respectant les projections sur $I^k \times \mathbb{R}^k$ [i.e. tel que $(T \circ pr_2|U)_* = \tau'_* \circ \chi$] . Quitte à remplacer χ_o par un morphisme strict homotope rel Δ , on peut supposer que χ coïncide avec Ψ_* au-dessus d'un voisinage de Δ dans Δ'_ε .

4.4. Quitte à remplacer χ par un morphisme strict homotope, on peut supposer que χ et ϕ_* coïncident sur $\tau E(\omega_{\Delta'_\varepsilon})|\Delta'_\varepsilon$ et que l'on a $\chi|T_*(\xi|S') = (f' \circ \Phi)_*$.

La condition 4.4. est déjà réalisée au-dessus d'un voisinage ouvert Y de Δ dans Δ'_ε. On prend pour Y un voisinage tubulaire ouvert de Δ dans Δ'_ε. On considère une triangulation de $\Delta'_\varepsilon - Y$. On va obtenir 4.4. par récurrence sur les simplexes de la triangulation. Soit σ un simplexe, $\mathring{\sigma}$ sa frontière. On suppose que χ et ϕ_* coïncident sur $\tau E(\omega_{\Delta'_\varepsilon})|\mathring{\sigma}$.

L'application $t \circ \Phi : \overline{\Gamma^{-1}(U)} \to I^k$ étant une application de rang k, le fibré vectoriel $\eta^{2(m-n-1)}|\sigma$ est de la forme $\eta_1^{m-n-1} \oplus \eta_2^{m-n-1}$, avec $T : E(\eta_1) \to I^k$ application de rang k. Donc si on note $\varpi^{n+k+1} = \tau E(\omega_{\Delta'_\varepsilon})|\sigma \oplus \eta_1$, l'application linéaire fibrée $pr_2 \circ T_* : \varpi \to \mathbb{R}^k$ est de rang k sur chaque fibre. On note $\varpi_o^{n+1} = \overbrace{(pr_2 \circ T_*)}^{-1}(0)$ et l'on choisit une décomposition $\varpi = \varpi_\cap \times \mathbb{R}^k$.

On construit un morphisme $\chi_1 : \varpi \to \tau(M^m \times I^k)$ au-dessus de $\phi|\sigma$ satisfaisant à :

(a) χ_1 est un monomorphisme sur chaque fibre ;

(b) χ_1 est compatible avec les projections sur $\mathbb{R}^k$;

(c) χ_1 coïncide avec ϕ_* sur $\tau E(\omega_{\Delta'_\varepsilon})|\sigma$ et coïncide avec χ sur $\varpi|\mathring{\sigma}$.

Pour cela, on commence par construire un morphisme $\chi'_1 : \varpi \to \tau(M^m \times I^k)$ au-dessus de $\phi|\sigma$ satisfaisant à (b) et (c). Si $k \leqslant 2m-3n-2$, on peut remplacer χ'_1 par un morphisme χ''_1 voisin, au-dessus de $\phi|\sigma$, satisfaisant à (a) et

(c). Notons h l'application composée $\varpi \xrightarrow{\chi_1''} \tau(M^m \times I^k) \to \mathbb{R}^k$. Soit ζ l'automorphisme de $\varpi = \varpi_o \times \mathbb{R}^k$ défini par $\zeta(x,t) = (x, h(x,t))$. Il suffit alors de prendre $\chi_1 = \chi_1'' \circ \zeta^{-1}$.

Le morphisme strict $\chi|\varpi_o : \varpi_o \to \tau M^m$ est homotope rel $\varpi_o|\mathring{\sigma}$, au-dessus de $\phi|\sigma$, au morphisme strict $\chi_1|\varpi_o : \varpi_o \to \tau M^m$ si $\pi_i(V_{m,n+1}) = 0$ pour $i \leqslant \dim \Delta'$, i.e. si $k \leqslant 2m-3n-3$. Le morphisme strict $\chi|\varpi$ est donc homotope rel $\varpi|\mathring{\sigma}$ au morphisme strict χ_1 par une homotopie au-dessus de $\phi|\sigma$, compatible avec les projections sur $\mathbb{R}^k$. Cette homotopie montre que, quitte à remplacer $\chi|\sigma$ par un morphisme strict homotope rel $\mathring{\sigma}$, on peut imposer à χ et ϕ_* de coïncider sur $\tau E(\omega_{\Delta'_\varepsilon})|\sigma$. On impose aussi $\chi|\Gamma_*(\xi|S') = (f' \circ \Phi)_*$.

4.5. Construction du plongement Ψ.

On va prolonger χ en un morphisme strict

$$X : \tau(U)|E_2(\omega_{\Delta'_\varepsilon}) \to \tau(M^m \times I^k)$$

au-dessus de ϕ, compatible avec les projections sur $\mathbb{R}^k$ et coïncidant avec Ψ_* au-dessus d'un voisinage de Δ et sur $\Gamma_*(\tau E(\xi)|D'_\varepsilon) \cup \tau E_2(\omega_{\Delta'_\varepsilon})$. Il suffira alors de prendre Ψ_* égal à X au-dessus de $\phi : E_2(\omega_{\Delta'_\varepsilon}) \to M^m \times I^k$, ce qui permettra d'achever la construction du plongement Ψ.

On construit tout d'abord un morphisme de fibrés vectoriels

$$\hat{X} : \xi \times [0,1] \to \tau(M^m \times I^k)$$

au-dessus de l'application $D'_\varepsilon \times [0,1] \to \phi(E_2(\omega_{\Delta'_\varepsilon}))$ définie par $(d,a) \to \phi(a\,\gamma(d))$, morphisme satisfaisant à

(a) la restriction de $\hat{X}$ à chaque fibre est un monomorphisme d'image

transverse à $\phi(E_2(\omega_{\Delta'_\varepsilon}))$;

(b) $\hat{X}$ est compatible avec les projections sur $\mathbb{R}^k$;

(c) $\hat{X}|\xi \times \{0\} = \chi \circ \rho$ [où $\rho : \xi \to \eta$] , $\hat{X}|\xi \times \{1\} = (f' \circ \Phi)_*|\xi$,

et $\hat{X}|(\xi|D\cup S')\times\{t\}$ est indépendant de $t \in [0,1]$.

Compte-tenu de ce que $t \circ \Phi : \Gamma^{-1}(U) \to I^k$ est une application de rang k , si $k \leqslant 2m-3n-3$, on peut construire le morphisme $\hat{X}$ au moyen de la méthode utilisée en 4.4. pour construire χ_1 .

Il n'y a alors aucune difficulté pour prolonger χ en X..

5.- <u>Surjectivité de</u> α_{k+1} <u>pour</u> $0 \leqslant k \leqslant 2m-3n-3$.

Soit f_o le plongement pris pour point de base de $\mathcal{P}\ell(V^n, M^m)$. Soit $[B']$ un élément du groupe $\Omega_{2n-m+k}(\mathcal{C}_{f_o}, \partial W ; \theta_{f_o})$, B' étant une application normale $(\Delta', \partial\Delta' ; \nu(\Delta')) \to (\mathcal{C}_{f_o}, \partial W ; \theta_{f_o})$.

On considère la famille à k paramètres $f = (f_t)_{t \in I^k}$ définie par $f_t = f_o$ pour $t \in I^k$. L'application normale B' peut être regardée comme un cobordisme normal entre deux applications normales dont la source est vide. D'après le §2. on peut donc associer à B' un modèle de déformation $\Gamma_s : E(\xi) \to E(\omega_{\Delta'_\varepsilon} \oplus \eta)$, $s \in I$. Et si $0 \leqslant k \leqslant 2m-3n-3$, la démonstration de la proposition 2 nous donne le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
\Gamma^{-1}(U) & \xrightarrow{\Gamma|\Gamma^{-1}(U)} & U & \xrightarrow{pr_2|U} & E(\eta) \\
\downarrow{\scriptstyle \Phi} & & \downarrow{\scriptstyle \Psi} & & \downarrow{\scriptstyle T} \\
V^n \times I^k & \xrightarrow{f'=f_o\times id(I^k)} & M^m \times I^k & \xrightarrow{t'} & I^k \subset \mathbb{R}^k
\end{array}$$

En transmuant la déformation Γ_s (fixe en dehors d'un voisinage suffi-

samment petit de D' dans $\bar{\Gamma}^{-1}(U)$) à l'aide des plongements Φ et Ψ, on obtient une famille à $(k+1)$ paramètres $F = (f_t)_{t \in I^k \times I}$ d'applications de V^n dans M^m telle que f_t soit un plongement pour $t \in \partial I^{k+1}$. La famille F est donc un représentant d'un élément $[F]$ de $\pi_{k+1}(\mathrm{Imm}(V^n, M^m), P_2, f_0)$. Et l'on a $\alpha_{k+1}([F]) = [B']$ d'après la construction même de Φ, Ψ et T. Par suite l'application α_{k+1} est surjective pour $0 \leqslant k \leqslant 2m-3n-3$.

CHAPITRE VI : CONSEQUENCES DU RESULTAT FONDAMENTAL.

Dans ce chapitre, on note V^n une variété différentielle compacte sans bord, M^m une variété différentielle et f_o un plongement de V^n dans M^m. On obtient des résultats sur les groupes d'homotopie relatifs $\pi_k(\mathrm{Hom}(V^n,M^m), P\ell, f_o)$ dans le domaine métastable $0 \leqslant k \leqslant 2m-3n-3$ en utilisant les théorèmes A, B et C du ch. IV. §3 . La plupart de ces résultats ont été annoncés dans [5] .

1.- Remarques sur les groupes d'homotopie des espaces de plongements.

Pour $2m-3n-4 \geqslant 0$, on met sur l'ensemble pointé $\pi_1(\mathrm{Hom}(V^n,M^m), P\ell, f_o)$ une structure de groupe abélien en transportant celle de $\Omega_{2n-m+1}(\mathcal{C}_{f_o},\partial W ; \theta_{f_o})$ par la bijection α_1 . Pour $2m-3n-5 \geqslant 0$ l'isomorphisme α_2 montre que le groupe $\pi_2(\mathrm{Hom}(V^n,M^m), P\ell, f_o)$ est abélien.

En prenant $M^m = \mathbb{R}^m$, on obtient ainsi une structure de groupe abélien sur $\pi_o(\mathcal{P}\ell(V^n,\mathbb{R}^m), f_o)$, admettant la classe $[f_o]$ pour élément neutre. On peut considérer l'application

$$d : \pi_o(\mathcal{P}\ell(V^n,\mathbb{R}^m)) \times \pi_o(\mathcal{P}\ell(V^n,\mathbb{R}^m)) \to \Omega_{2n-m+1}(W,\partial W ; \theta)$$

définie par $d([f_o], [f_1]) = \alpha_1([f_1])$, l'application α_1 dépendant du plongement f_o . On a la relation $d([f_o],[f_2]) = d([f_o], [f_1]) + d([f_1], [f_2])$.

Proposition 1.1.- Pour $0 \leqslant j \leqslant 2m-3n-4$, les groupes abéliens $\pi_j(\mathcal{P}\ell(V^n,\mathbb{R}^m),f_o)$ sont de type fini.

Démonstration. Pour $0 \leqslant j \leqslant 2m-3n-4$, le groupe abélien $\pi_j(\mathcal{P}\ell(V^n,\mathbb{R}^m),f_o)$ est isomorphe au groupe $\pi_{N+j+1}(T(\theta_N), T(\theta_N|\partial W))$ pour N entier suffisamment

grand. L'entier N étant supposé grand, les espaces $T(\theta_N)$ et $T(\theta_N|\partial W)$ sont simplement connexes. Or un espace simplement connexe a ses groupes d'homotopie de type fini en toute dimension si et seulement si ses groupes d'homologie sont de type fini en toute dimension (voir par exemple Spanier [1], 9.6.16.). Les espaces $T(\theta_N)$ et $T(\theta_N|\partial W)$ étant des CW-complexes finis, les groupes $H_i(T(\theta_N))$ et $H_i(T(\theta_N|\partial W))$ sont de type fini. Par suite les groupes $\pi_i(T(\theta_N))$ et $\pi_i(T(\theta_N|\partial W))$ sont de type fini en toute dimension. Comme les groupes abéliens de type fini forment une classe de Serre, il en résulte que le groupe $\pi_i(T(\theta_N), T(\theta_N|\partial W))$ est de type fini.

Proposition 1.2.- Pour $2m-3n-3 \geqslant 0$, l'existence d'un plongement de V^n dans $\mathbb{R}^m$ ne dépend pas de la structure différentielle de V^n. Pour $0 \leqslant j \leqslant 2m-3n-4$, les groupes abéliens $\pi_j(\mathcal{P}\ell(V^n,\mathbb{R}^m), f_*)$ ne dépendent que de l'espace topologique sous-jacent à la variété différentielle V^n, à isomorphisme près. Pour $1 \leqslant j \leqslant 2m-3n-4$, l'espace $\mathcal{P}\ell(V^n,\mathbb{R}^m)$ est j-simple.

Démonstration. Notons V^* l'espace quotient $(V \times V - \Delta_V)/s$, s étant l'involution de $V \times V$ définie par $s(x,y) = (y,x)$. D'après le théorème B, pour $2m-3n-3 \geqslant 0$, il existe un plongement de V^n dans $\mathbb{R}^m$ si et seulement si le fibré vectoriel $m\omega|V^*$ possède une section partout non nulle. Cette condition ne dépend que de l'espace topologique sous-jacent à V^n.

D'après le théorème B et la dualité de Poincaré, pour $0 \leqslant j \leqslant 2m-3n-4$, le groupe $\pi_j(\mathcal{P}\ell(V^n,\mathbb{R}^m), f_*)$ est isomorphe au groupe $H^{m-j-1}(V^*; m\omega|V^*)$, groupe qui ne dépend que de l'espace topologique sous-jacent à V^n.

Enfin, il résulte de la définition de l'application α_{j+1} que l'espace $\mathcal{R}_\ell(V^n,\mathbb{R}^m)$ est j-simple pour $1 \leqslant j \leqslant 2m-3n-4$.

2.- Généralisation à k paramètres du théorème de Whitney sur la suppression des points doubles isolés.

Dans ce paragraphe, on étudie les groupes d'homotopie relatifs $\pi_k(\mathrm{Hom}(V^n,M^m), P\ell, f_o)$ pour $k = m-2n$. On est amené à considérer l'isomorphisme (cf. I.5.1. cor.)

$$\mu : \Omega_o(\mathcal{C}_{f_o},\partial W ; \theta_{f_o}) \xrightarrow{\sim} H_o(\mathcal{C}_{f_o},\partial W ; \mathbb{Z}(\theta_{f_o})) .$$

Le théorème A s'énonce alors comme suit (Dax, [3], légèrement amélioré) :

Proposition 2.1.- Soient V^n et M^m deux variétés, la variété V^n étant compacte sans bord. Lorsque $m = 2n$, $n \geqslant 3$, une application continue $f : V^n \to M^m$ est homotope à un plongement si et seulement si $\mu(\alpha_o(f)) = 0$ dans $H_o(\mathcal{C}_f,\partial W ; \mathbb{Z}(\theta_f))$. Lorsque $m-2n \geqslant 1$, l'application naturelle

$$\mu \circ \alpha_{m-2n} : \pi_{m-2n}(\mathrm{Hom}(V^n,M^m),P\ell, f_o) \to H_o(\mathcal{C}_{f_o},\partial W ; \mathbb{Z}(\theta_{f_o}))$$

est un isomorphisme pour $m \geqslant n+3$, un épimorphisme (surjection si $m-2n=1$) pour $m = n+2$.

Corollaire. Pour $m-2n \geqslant 1$, $m \geqslant n+3$, les groupes abéliens $\pi_{m-2n}(\mathrm{Hom}(V^n,M^m),P\ell,f_o)$ sont somme directe de groupes isomorphes à $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}_2$.

La proposition précédente contient comme cas particuliers les résultats suivants :

a) Il existe un plongement de V^n dans $\mathbb{R}^{2n}$ pour $n \geqslant 3$ (Withney [20]).

b) Si V^n est connexe, le groupe d'homotopie $\pi_j(\mathcal{R}_\ell(V^n,\mathbb{R}^m), f_o)$ est

trivial pour $0 \leqslant j \leqslant m-2n-1$, $m \geqslant n+3$ [remarquons que le domaine stable est défini par $0 \leqslant j \leqslant m-2n-2$]. En particulier, si V^n est connexe, $n \geqslant 2$, deux plongements de V^n dans $\mathbb{R}^{2n+1}$ sont isotopes (Wu [22]).

c) Supposons que V^n ait deux composantes connexes, V_1^n et V_2^n , et que $M^m = \mathbb{R}^m$. L'application ($m-2n \geqslant 1$)

$$\mu \circ \alpha_{m-2n} : \pi_{m-2n-1}(\mathcal{P}\ell(V^n, \mathbb{R}^m), f_o) \to H_o(V_1 \times V_2 ; \mathbb{Z}(\nu V_1) \otimes \mathbb{Z}(\nu V_2))$$

est un isomorphisme pour $m \geqslant n+3$. Le groupe $H_o(V_1 \times V_2 ; \mathbb{Z}(\nu V_1) \otimes \mathbb{Z}(\nu V_2))$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}_2$ suivant que V^n est orientable ou non. Dans le premier cas on peut choisir l'isomorphisme de façon naturelle à partir d'une orientation de V^n .

On appelle nombre d'enlacement de $x \in \pi_{m-2n-1}(\mathcal{P}\ell(V^n, \mathbb{R}^m), f_o)$ le nombre $\mu \circ \alpha_{m-2n}(x) \in \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}_2$.

On appelle nombre d'enlacement d'un plongement $f_1 : V^n \to \mathbb{R}^{2n+1}$ le nombre $\mu \circ \alpha_1([f_1]) \in \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}_2$, en prenant pour $f_o : V^n \to \mathbb{R}^{2n+1}$ un plongement tel que $f_o(V_1^n) \subset \mathbb{R}^{2n} \times]-\infty, 0[$, $f_o(V_2^n) \subset \mathbb{R}^{2n} \times]0, +\infty[$. Pour $n \geqslant 2$ les classes d'isotopie des plongements de V^n dans $\mathbb{R}^{2n+1}$ sont classifiées par leurs nombres d'enlacement (Haefliger, [9], 1.3.e.).

3.- Cas où l'une des variétés V^n , M^m est c-connexe.

On dit que V^n est homologiquement c-connexe, c entier $\geqslant -1$, si $\tilde{H}_i(V^n ; \mathbb{Z}) = 0$ pour $0 \leqslant i \leqslant c$. Si V^n est une variété compacte sans bord homologiquement c-connexe, on a $H^i(W ; \mathbb{Z}) = 0$ et $H^i(W ; \mathbb{Z}(\omega)) = 0$ pour $i \geqslant 2n-c$ (cf. [8] preuve de 2.8.). D'après I.5.1., le théorème B s'énonce

alors comme suit :

Proposition 3.1.- Soit V^n une variété compacte sans bord homologiquement c-connexe, $c \geqslant -1$. Si $2m-3n-3 \geqslant 0$, $m \geqslant 2n-c$, il existe un plongement de V^n dans $\mathbb{R}^m$. Si $0 \leqslant j \leqslant 2m-3n-4$, pour tout plongement $f_o : V^n \to \mathbb{R}^m$, le groupe abélien $\pi_j(\mathcal{P}\ell(V^n,\mathbb{R}^m), f_o)$ est trivial pour $0 \leqslant j \leqslant m-2n+c-1$ et isomorphe à $H^{2n-c-1}(W ; \mathbb{Z}(\omega)^m)$ pour $j = m-2n+c \geqslant 0$.

Dans la proposition précédente, la partie concernant l'existence d'un plongement et le cas $j = 0$ ont été démontrés par Haefliger ([9], 1.3. et [11]).

On suppose maintenant que la variété M^m est c-connexe. L'application $p : \mathcal{C}_{f_o} \to W$ étant un fibré de Serre de fibre ΩM, est c-connexe. D'après I.7.1. le groupe $\Omega_i(\mathcal{C}_{f_o}, \partial W ; \theta_{f_o})$ est alors isomorphe au groupe $\Omega_i(W, \partial W ; \theta)$ pour $i \leqslant c$. On a donc :

Proposition 3.2.- Soient V^n une variété compacte sans bord et M^m une variété c-connexe. Si $1 \leqslant k \leqslant 2m-3n-3$ et $k \leqslant m-2n+c-1$, le groupe $\pi_k(\mathrm{Hom}(V^n,M^m), P\ell, f_o)$ est isomorphe au groupe $\pi_{k-1}(\mathcal{P}\ell(V^n,\mathbb{R}^m), f_o)$.

Application. Pour $0 \leqslant j \leqslant 2m-3n-4$, on a un isomorphisme $\pi_{j+1}(\mathrm{Hom}(V^n,S^m), P\ell(V^n,S^m), f_o) \simeq \pi_j(\mathcal{P}\ell(V^n,\mathbb{R}^m), f_o)$.

4.- Cas où l'on fait des hypothèses de connexité sur $f : V^n \to M^m$.

Soit V^n une variété compacte connexe sans bord de dimension $n \geqslant 1$. Soient D^n un disque plongé dans V^n et a un point de $S^{n-1} = \partial D^n$.

Etant donnée une application continue $f : V^n \to M^m$, on note $\bar{f}_i : \pi_i(V^n - \overset{\circ}{D}{}^n, S^{n-1}, a) \to \pi_i(M^m, f(a))$ l'homomorphisme (application pointée si $i = 0$ ou 1) défini par la composition

$$\pi_i(V^n - \overset{\circ}{D}{}^n, S^{n-1}, a) \xrightarrow{j_*} \pi_i(V^n, D^n) \approx \pi_i(V^n, a) \xrightarrow{f_*} \pi_i(M^m, f(a)),$$

où j désigne l'inclusion de $(V^n - \overset{\circ}{D}{}^n, S^{n-1})$ dans (V^n, D^n).

<u>lemme</u>. <u>On suppose les variétés</u> V^n <u>et</u> M^m <u>connexes</u>, $n \geqslant 1$. <u>La variété</u> ∂W <u>est alors connexe non vide. Pour tout entier</u> $i \geqslant 0$, $\pi_i(\mathcal{C}_f, \partial W) = 0$ <u>si et seulement si l'application</u> $\bar{f}_i$ <u>est injective et l'application</u> $\bar{f}_{i+1}$ <u>surjective</u>.

<u>Démonstration</u>. Mettons sur la variété V^n une métrique riemannienne et notons d la distance associée. On note T_ε le sous-espace de $V \times V$ formé des couples (x,y) tels que $d(x,y) \leqslant 2\varepsilon$. On note $\Omega_\varepsilon(\mathcal{M}(f) ; V)$ le sous-espace de $\Omega(\mathcal{M}(f) ; V)$ formé des courbes c telles que $d(c(-1),c(1)) \geqslant 2\varepsilon$. A tout élément (x,y) de T_ε on peut associer la géodésique allant de x à y (ε petit). ∂T_ε peut être ainsi considéré comme un sous-espace de $\Omega_\varepsilon(\mathcal{M}(f) ; V)$. Pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, la paire topologique $(\Omega_\varepsilon(\mathcal{M}(f) ; V), \partial T_\varepsilon)$ est homéomorphe à un revêtement à deux feuillets de $(\mathcal{C}_f, \partial W)$. Par suite, pour $(x_o, y_o) \in \partial T_\varepsilon$, il existe des isomorphismes

$$\pi_i(\mathcal{C}_f, \partial W) \approx \pi_i(\Omega_\varepsilon(\mathcal{M}(f) ; V), \partial T_\varepsilon, (x_o, y_o))$$

pour tout entier $i \geqslant 1$. De plus $\pi_o(\mathcal{C}_f, \partial W) = 0$ si et seulement si $\pi_o(\Omega_\varepsilon(\mathcal{M}(f) ; V), \partial T_\varepsilon) = 0$.

Considérons le fibré de Serre $\Pi : \Omega_\varepsilon(\mathcal{M}(f) ; V) \to V$ défini par

$\Pi(c) = c(-1)$. On note D^n le sous-espace de V^n formé des $y \in V^n$ tels que $d(x_o,y) \leqslant 2a$. Si a est suffisamment petit, D^n est une boule-variété à bord de V^n difféomorphe à un disque de dimension n. Le fibré précédent a pour fibre au-dessus de x_o l'espace $\Omega(\mathcal{M}(f) ; V-\mathring{D}^n, x_o)$, espace des courbes de $\mathcal{M}(f)$ d'origine x_o et d'extrémité située dans $V^n-\mathring{D}^n$. Considérons le fibré de Serre $\Pi|T_\varepsilon : T_\varepsilon \to V$. Sa fibre au-dessus de x_o s'identifie à S^{n-1}, bord de D^n. De sorte que l'on a des isomorphismes

$$\pi_i(\Omega_\varepsilon(\mathcal{M}(f) ; V), \partial T_\varepsilon, (x_o,y_o)) \approx \pi_i(\Omega(\mathcal{M}(f) ; V-\mathring{D}^n, x_o), S^{n-1}, y_o)$$

pour tout entier $i \geqslant 1$. De plus $\pi_o(\Omega_\varepsilon(\mathcal{M}(f) ; V), \partial T_\varepsilon) = 0$ si et seulement si $\pi_o(\Omega(\mathcal{M}(f) ; V-\mathring{D}^n, x_o), S^{n-1}) = 0$.

Ces derniers groupes entrent dans la suite exacte d'homotopie

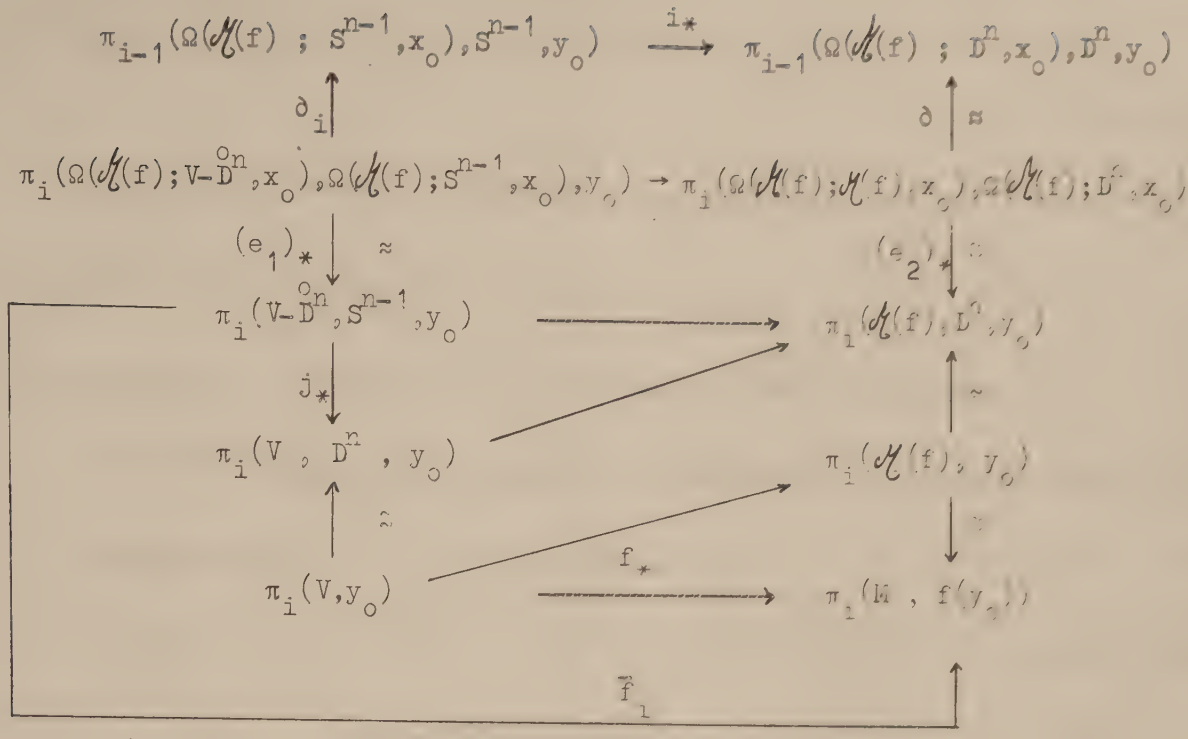
$$\pi_i(\Omega(\mathcal{M}(f) ; V-\mathring{D}^n, x_o), S^{n-1}, y_o)$$

$$\pi_i(\Omega(\mathcal{M}(f) ; V-\mathring{D}^n, x_o), \Omega(\mathcal{M}(f) ; S^{n-1}, x_c), y_o)$$

$$\partial_i \downarrow$$

$$\pi_{i-1}(\Omega(\mathcal{M}(f) ; S^{n-1}, x_o), S^{n-1}, y_o)$$

où ∂_i est l'homomorphisme bord (application pointée si $i = 0$, 1 ou 2). Par suite, pour tout entier $i \geqslant 0$, $\pi_i(\mathcal{C}_f, \partial W) = 0$ si et seulement si le noyau de ∂_i est trivial et l'application ∂_{i+1} surjective. Pour tout entier $i \geqslant 0$, ∂_i entre dans le diagramme commutatif suivant :



On a noté $e_1 : \Omega(\mathcal{H}(f) ; V\text{-}\overset{\circ}{D}{}^n, x_o) \longrightarrow V\text{-}\overset{\circ}{D}{}^n$ et $e_2 : \Omega(\mathcal{H}(f) ; \mathcal{H}(f), x_o) \to \mathcal{H}(f)$ les applications continues définies par $c \mapsto c(1)$. Ce sont des fibrés de Serre et par suite les homomorphismes (applications pointées si $i = 0$ ou 1) $(e_1)_*$ et $(e_2)_*$ sont des isomorphismes pour tout entier $i \geqslant 0$. L'homomorphisme bord ∂ (application pointée si $i = 0$, 1 ou 2) est un isomorphisme car les espaces $\Omega(\mathcal{H}(f) ; \mathcal{H}(f), x_o)$ et D^n sont contractiles. On a noté i l'inclusion de $\Omega(\mathcal{H}(f) ; S^{n-1}, x_o)$ dans $\Omega(\mathcal{H}(f) ; D^n, x_o)$. L'application $\Omega(\mathcal{H}(f) ; D^n, x_o) \to D^n$ définie par $c \mapsto c(1)$ est un fibré de Serre. Par suite i_* est un isomorphisme pour tout entier $i \geqslant 2$ et pour $i = 1$, i_* est surjective, $i_*^{-1}(0) = 0$.

D'après le diagramme précédent, pour tout entier $i \geqslant 0$, le noyau de ∂_i est trivial si et seulement si le noyau de $\bar{f}_i$ est trivial, l'application ∂_{i+1} est surjective si et seulement si l'application $\bar{f}_{i+1}$ est surjective. On termine la démonstration du lemme en remarquant que, même pour $i = 0$ ou 1,

le noyau de $\bar{f}_i$ est trivial si et seulement si $\bar{f}_i$ est injective.

c.q.f.d.

Compte-tenu du lemme précédent, de I.5.1. et I.7.1., le théorème A a pour conséquence la proposition suivante :

Proposition 4.1.- Soient V^n et M^m deux variétés connexes, $n \geqslant 1$; et $f : V^n \to M^m$ une application continue. On suppose V^n compacte sans bord et $\bar{f}_i$ injective pour $0 \leqslant i \leqslant c$, surjective pour $0 \leqslant i \leqslant c+1$, $c \geqslant -1$. Soit k un entier, $0 \leqslant k \leqslant 2m-3n-3$. Alors f est homotope à un plongement pour $k = 0$, $m \geqslant 2n-c$. Pour tout plongement f_c homotope à f le groupe $\pi_k(\mathrm{Hom}(V^n, M^m), P\ell, f_c)$ est trivial pour $1 \leqslant k \leqslant m-2n+c$ et isomorphe à $H_{c+1}(\mathcal{C}_{f_c}, \partial W ; \mathcal{Z}(\theta_{f_c}))$ pour $k = m-2n+c+1 \geqslant 1$.

Si la variété V^n est d-connexe, $d \geqslant 0$, d'après le théorème d'excision homotopique (cf. [15], 9.3.5.), l'application

$$j_* : \pi_i(V^n - \mathring{D}^n, S^{n-1}) \longrightarrow \pi_i(V^n, D^n)$$

est une bijection si $0 \leqslant i \leqslant n+d-2$, une surjection si $0 \leqslant i \leqslant n+d-1$. Par suite, si $k \leqslant m-n+d-2$, on peut dans la proposition précédente remplacer les conditions sur les $\bar{f}_i$ pour les mêmes conditions sur les $f_* : \pi_i(V^n) \to \pi_i(M^m)$. En particulier, si $k \leqslant m-n-2$, on peut toujours le faire et cela donne le résultat annoncé dans [2] ; ce résultat a été redémontré par une autre méthode par Morlet ([14], III.5.). Pour $k = 0$ ou 1, la condition $k \leqslant m-n-2$ est toujours vérifiée dans le domaine métastable $(0 \leqslant k \leqslant 2m-3n-3)$ et l'on obtient alors un résultat de Haefliger [7].

Corollaire. Notons $e : S^n \to S^n \times \mathbb{R}^{m-n}$ le plongement défini par $e(x) = (x,0)$. Pour $1 \leqslant k \leqslant 2m-3n-3$, $k \leqslant m-3$, $n \geqslant 1$, le groupe $\pi_k(\mathrm{Hom}(S^n, S^n \times \mathbb{R}^{m-n}), P\ell, e)$ est trivial.

En effet, l'application $\overline{e}_i$ entre dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \pi_i(D^n, S^{n-1}) & \xrightarrow{\overline{e}_i} & \pi_i(S^n) \\ \partial \downarrow \approx & \nearrow S & \\ \pi_{i-1}(S^{n-1}) & & \end{array}$$

où ∂ est l'homomorphisme bord et S l'homomorphisme suspension. D'après le théorème de suspension de Freudenthal, $\overline{e}_i$ est un isomorphisme pour $i \leqslant 2n-3$, un épimorphisme pour $i = 2n-2$.

c.q.f.d.

D'après le lemme, lorsque V^n et M^m sont connexes, $n \geqslant 1$, $\pi_o(\mathcal{C}_f, \partial W) = 0$ si et seulement si l'application $\overline{f}_1 : \pi_1(V - \overset{o}{D}{}^n, S^{n-1}) \to \pi_1(M)$ est surjective. On a donc :

Proposition 4.2.- On suppose V^n et M^m connexes, $n \geqslant 1$. Pour $m-2n \geqslant 1$, $m \geqslant n+3$, le groupe $\pi_{m-2n}(\mathrm{Hom}(V^n, M^m), P\ell, f_o)$ est trivial si et seulement si l'application $(\overline{f_o})_1 : \pi_1(V - \overset{o}{D}{}^n, S^{n-1}) \to \pi_1(M)$ est surjective.

En particulier, pour $m \geqslant 4$, le groupe $\pi_{m-2}(\mathrm{Hom}(S^1, S^1 \times \mathbb{R}^{m-1}), P\ell, e)$ n'est pas trivial $[e(x) = (x,0)]$.

On appelle pseudo-famille de plongements (resp. famille de plongements), un plongement $V^n \times I^k \to M^m \times I^k$ respectant sur $V^n \times \partial I^k$ (resp. $V^n \times I^k$) la projection sur I^k . Soit $f : S^1 \times I^k \to (S^1 \times \mathbb{R}^{k+1}) \times I^k$, $k \geqslant 2$, un représentant d'un élément non nul de $\pi_k(\mathrm{Hom}(S^1, S^1 \times \mathbb{R}^{k+1}), P\ell, e)$. D'après

la proposition 4.1. généralisée aux variétés à bord, e étant une équivalence d'homotopie, l'application f est homotope rel $S^1 \times \partial I^k$ à un plongement g. g est une pseudo-famille de plongements non homotope (dans l'espace des pseudo-familles de plongements) à une famille de plongements.

5.- Tensorisation avec les rationnels.

D'après I.5.2., le théorème A entraîne la proposition suivante :

Proposition 5.1.- Soient V^n une variété compacte sans bord et M^m une variété. Alors, pour $1 \leqslant k \leqslant 2m-3n-3$, le groupe abélien $\pi_k(\mathrm{Hom}(V^n, M^m), P\ell, f_o) \otimes \mathbb{Q}$ est isomorphe au groupe $H_{2n-m+k}(\mathcal{C}_{f_o}, \partial W ; \mathbb{Q}(\theta_{f_o}))$.

Corollaire. Soit V^n une variété compacte sans bord. Alors, pour $0 \leqslant j \leqslant 2m-3n-4$, le groupe abélien $\pi_j(\mathcal{P}\ell(V^n, \mathbb{R}^m), f_o) \otimes \mathbb{Q}$ est isomorphe au groupe abélien $H^{m-j-1}(W ; \mathbb{Q}(\omega)^m)$. Par suite, pour $m \leqslant j \leqslant 2m-3n-4$, les groupes abéliens $\pi_j(\mathcal{P}\ell(V^n, \mathbb{R}^m), f_o)$ sont finis. Et $\pi_{m-1}(\mathcal{P}\ell(V^n, \mathbb{R}^m), f_o) \otimes \mathbb{Q}$ est isomorphe à $\mathbb{Q}$ ou 0 suivant que m est pair, $n \neq 0$, ou non, V^n étant supposée connexe.

6.- Etude des groupes $\pi_j(\mathcal{P}\ell(S^n, \mathbb{R}^m), f_o)$.

Notons $W(V^n)$ la variété W^{2n} associée à V^n en IV 1.1.. A deux points distincts de S^n, on peut associer une direction de $\mathbb{R}^{n+1}$, c'est-à-dire un élément de l'espace projectif réel $\mathbb{P}^n$. Cela définit une application $\pi : W(S^n) \to \mathbb{P}^n$ qui est un fibré en boules D^n associé à un fibré vectoriel σ^n.

On montre que $\omega = \pi^* \lambda_n$, où λ_n est le 1-fibré canonique de base $\mathbb{P}^n$. De plus νW est stablement équivalent à $\nu\mathbb{P}^n - \sigma^n$ et $\tau\mathbb{P}^n$ stablement équi-

valent à $(n+1)\,\lambda_n$. L'isomorphisme de Thom-Gysin

$\Omega_{2n-m+j+1}(W(S^n),\ \partial W(S^n)\ ;\ m\omega \oplus \nu W) \approx \Omega_{n-m+j+1}(\mathbb{P}^n\ ;\ (m-n-1)\,\lambda_n)$ conduit à la proposition suivante, compte-tenu de I.7.3. :

Proposition 6.1.- Pour $0 \leqslant j \leqslant 2m-3n-4$ et tout plongement $f_o : S^n \to \mathbb{R}^m$, on a des isomorphismes

$$\pi_j(\mathcal{P}\ell(S^n,\mathbb{R}^m),f_o) \approx \Omega_{n-m+j+1}(\mathbb{P}^n\ ;\ (m-n-1)\lambda_n) \approx \pi_j(T((m-n-1)\lambda_n)) \approx \pi_j(V_{m,n+1}),$$

où λ_n est le 1-fibré vectoriel canonique de base l'espace projectif réel $\mathbb{P}^n$, T l'espace de Thom et $V_{m,n+1}$ est la variété de Stiefel des $(n+1)$-repères de $\mathbb{R}^m$.

On a les isomorphismes suivants :

$H_1(\mathbb{P}^n\ ;\ \mathbb{Z}) \approx H_2(\mathbb{P}^n\ ;\ \mathbb{Z}(\lambda)) \approx \ldots \approx H_{n-1}(\mathbb{P}^n\ ;\ \mathbb{Z}(\lambda)^n) \approx \mathbb{Z}_2$,

$H_1(\mathbb{P}^n\ ;\ \mathbb{Z}(\lambda)) \approx H_2(\mathbb{P}^n\ ;\ \mathbb{Z}) \approx \ldots \approx H_n(\mathbb{P}^n\ ;\ \mathbb{Z}(\lambda)^n) \approx 0$,

$H_o(\mathbb{P}^n\ ;\ \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}$, $H_o(\mathbb{P}^n\ ;\ \mathbb{Z}(\lambda)) \approx \mathbb{Z}_2$ si $n \neq 0$, $\mathbb{Z}$ si $n = 0$,

$H_n(\mathbb{P}^n\ ;\ \mathbb{Z}(\lambda)^{n-1}) \approx \mathbb{Z}$.

La connaissance des groupes $H_j(T(m-n-1)\lambda) \approx H_{n-m+j+1}(\mathbb{P}^n\ ;\ \mathbb{Z}(\lambda)^{m-n-1})$ conduit aux propositions suivantes en utilisant I.5.1. (généralisé aux classes de Serre) et I.5.2. :

Proposition 6.2.- Pour $0 \leqslant j \leqslant 2m-3n-4$ et tout plongement $f_o : S^n \to \mathbb{R}^m$, on a

$$\pi_j(\mathcal{P}\ell(S^n,\mathbb{R}^m),\ f_o) \approx \begin{cases} 0 & \text{pour } 0 \leqslant j \leqslant m-n-2 \\ \mathbb{Z} & \text{pour } j = m-n-1,\ m-n \text{ impair ou } n = 0 \\ \mathbb{Z}_2 & \text{pour } j = m-n-1,\ m-n \text{ pair et } n \neq 0 . \end{cases}$$

Si de plus $m-n$ est pair, les groupes $\pi_j(\mathcal{P}\ell(S^n\,\mathbb{R}^m),\ f_o)$ sont des 2-groupes

finis pour $j \leqslant m-2$ si m pair, pour tout j si m impair.

En particulier si $2m-3n-4 \geqslant 0$ deux plongements de S^n dans $\mathbb{R}^m$ sont isotopes (Haefliger [7]).

Proposition 6.3.- Pour $0 \leqslant m-n \leqslant j \leqslant 2m-3n-4$ le groupe $\pi_j(\mathcal{P}\ell(S^n,\mathbb{R}^m))$ est fini sauf pour m pair, $j = m-1$; dans ce cas, le groupe est somme directe du groupe $\mathbb{Z}$ et d'un groupe fini.

La proposition I.8.2. conduit à la proposition suivante :

Proposition 6.4.- Pour $0 \leqslant j \leqslant 2m-3n-4$ le groupe $\pi_j(\mathcal{P}\ell(S^n,\mathbb{R}^m))$ est isomorphe modulo la classe de Serre des 2-groupes à

$$\begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ impair}, m \text{ impair}, \\ \pi^s_{n-m+j+1} & \text{si } n \text{ pair}, m \text{ impair}, \\ \pi^s_{j-m+1} & \text{si } n \text{ pair}, m \text{ pair}, \\ \pi^s_{n-m+j+1} \oplus \pi^s_{j-m+1} & \text{si } n \text{ impair}, m \text{ pair}. \end{cases}$$

7.-Plongements de V^n dans $S^1 \times \mathbb{R}^{m-1}$.

Etant donné $a \in M^m$, on note $\Omega(M ; a)$ l'espace des lacets de M d'origine a, muni de la topologie de la convergence uniforme ; on note $\hat{a}$ le lacet constant. Lorsque $f : V^n \to M^m$ est l'application constante $f(x) = a$ pour tout $x \in V$, la paire topologique $(\mathcal{C}_f, \partial W)$ est homéomorphe au quotient de la paire $((V \times V - \overset{\circ}{T}_\varepsilon) \times \Omega(M ; a), \partial T_\varepsilon \times \{\hat{a}\})$ par l'involution $(x,y,c) \mapsto (y,x,c^{-1})$, $\varepsilon > 0$ suffisamment petit.

Lorsque $M^m = S^1 \times \mathbb{R}^{m-1}$, notons $\Omega_+(S^1 ; a) \subset \Omega(S^1 ; a)$ le sous-espace

des lacets de degré > 0 . Dans ce cas la paire $(\mathcal{C}_f, \partial W)$ a le même type d'homotopie que la paire $(W \amalg [(V \times V - \overset{\circ}{T}_\varepsilon) \times \Omega_+(S^1 ; a)], \partial W)$, donc que la paire $(W \amalg \coprod_{i \text{ entier} \geqslant 1} (V \times V - \overset{\circ}{T}_\varepsilon)_i , \partial W)$. Le fibré vectoriel θ_f de base $\mathcal{C}_f$ correspond au fibré vectoriel θ au-dessus de W et à un fibré vectoriel trivial au-dessus de $(V \times V - \overset{\circ}{T}_\varepsilon)_i$. Finalement, on a un isomorphisme

$$\Omega_{2n-m+k}(\mathcal{C}_f, \partial W ; \theta_f) \approx \Omega_{2n-m+k}(W, \partial W ; \theta) \oplus \bigoplus_{i \text{ entier} \geqslant 0} (\Omega_{2n-m+k}(V \times V - \overset{\circ}{T}_\varepsilon ; 0))_i .$$

Si la variété V est c-connexe, on a $\Omega_i(W, \partial W ; \theta) = 0$ pour $i \leqslant c$ d'après le §3 ; de plus $V \times V - \overset{\circ}{T}_\varepsilon$ est c-connexe, donc d'après I.7.1. on a $\Omega_i(V \times V - \overset{\circ}{T}_\varepsilon ; 0) \approx \pi_i^s$ pour $i \leqslant c$. On a donc :

Proposition 7.1.- Soit V^n une variété compacte sans bord c-connexe. Pour $1 \leqslant k \leqslant 2m-3n-3$, $k \leqslant m-2n+c$ et tout plongement $f_0 : V^n \to S^1 \times \mathbb{R}^{m-1}$ homotope à une application constante, le groupe $\pi_k(\mathrm{Hom}(V^n, S^1 \times \mathbb{R}^{m-1}) ; \mathcal{P}\ell, f_0)$ est isomorphe au groupe $\bigoplus_{i \geqslant 1} (\pi^s_{2n-m+k})_i$ où $(\pi^s_{2n-m+k})_i \approx \pi_{m+k-1}(S^{m-n-1})$, i entier.

En prenant $V^n = S^n$, on obtient le corollaire suivant :

Corollaire. Pour $n \geqslant 2$, $2m-3n-4 \geqslant 0$, on a

$$\pi_0(\mathcal{P}\ell(S^n, S^1 \times \mathbb{R}^{m-1})) \approx \bigoplus_{i \geqslant 1} \pi^s_{2n-m+1} \quad , \quad i \text{ entier.}$$

Par exemple les classes d'isotopie des plongements de S^n dans $S^1 \times \mathbb{R}^{2n}$, $n \geqslant 2$, sont classifiées par $\bigoplus_{i \geqslant 1} \mathbb{Z}$; les classes d'isotopie des plongements de S^n dans $S^1 \times \mathbb{R}^{2n-1}$, $n \geqslant 4$, sont classifiées par $\bigoplus_{i \geqslant 1} \mathbb{Z}_2$. Ce corollaire a été démontré dans la catégorie P.L. par Hacon [6].

8.- Cas où V a plusieurs composantes connexes de dimensions différentes.

On suppose que la variété V compacte sans bord a r composantes connexes V_i, $i = 1, \ldots, r$, de dimensions n_i éventuellement différentes. Soit $f : V \to M^m$ une application continue. On définit une variété $W(V)$ et un espace topologique $\mathcal{C}_f$ comme suit :

$$W(V) = \left(\coprod_i W(V_i) \right) \amalg \left(\coprod_{i<j} V_i \times V_j \right)$$

$$\mathcal{C}_f = \left(\coprod_i \mathcal{C}_{f|V_i} \right) \amalg \left(\coprod_{i<j} \mathcal{C}_{i,j} \right)$$

où $\mathcal{C}_{i,j}$, $i < j$, est l'espace des courbes

$$c : ([-1,1], -1, 1) \to (\mathcal{M}(f), V_i, V_j)$$

muni de la topologie de la convergence uniforme. $\partial W(V_i)$ étant un sous-espace de $\mathcal{C}_{f|V_i}$, on peut considérer $\partial W(V)$ comme un sous-espace $\mathcal{C}_f$. On note $p : \mathcal{C}_{i,j} \to V_i \times V_j$ l'application continue définie par $p(c) = (c(-1), c(1))$. On note $\theta_{f,N}$ le fibré vectoriel de base $\mathcal{C}_f$ défini par $\theta_{f,N} = \left(\coprod_i \theta_{f|V_i,N} \right) \amalg \left(\coprod_{i<j} \theta_{i,j,N} \right)$ où $\theta_{i,j,N}$ est le fibré image réciproque de $\nu^{N+m-n_i-n_j}(V_i \times V_j)$ par l'application $p : \mathcal{C}_{i,j} \to V_i \times V_j$. On note θ_f le fibré vectoriel stable associé à $\theta_{f,N}$ et $\theta_{i,j}$ celui associé à $\theta_{i,j,N}$.

La définition de α_k se généralise. Si N est un entier suffisamment grand, on peut définir une application

$$\alpha_k : \pi_k(\mathrm{Hom}(V, M^m), P\ell, f_o) \to \pi_{k+N}(T(\theta_{f_o,N}), T(\theta_{f_o,N}|\partial W))$$

pour $k \geqslant 1$ et un élément $\alpha_o(f) \in \pi_N(T(\theta_{f,N}), T(\theta_{f,N}|\partial W))$. Le théorème A est encore valable dans ce cas en remplaçant n par $\sup_i n_i$.

Par exemple, si V a deux composantes connexes V_1^p et V_2^q, et si $M^m = \mathbb{R}^m$, le groupe $\pi_j(\mathcal{P}\ell(V,\mathbb{R}^m), f_o)$ est isomorphe pour $0 \leqslant j \leqslant 2m-3\sup(p,q)-4$ au groupe

$$\pi_j(\mathcal{P}\ell(V_1^p,\mathbb{R}^m), f_o|V_1^p) \oplus \pi_j(\mathcal{P}\ell(V_2^q,\mathbb{R}^m), f_o|V_2^q) \oplus \Omega_{p+q-m+j+1}(V_1^p \times V_2^q ; \nu V_1 \times \nu V_2) .$$

Etudions le cas particulier $V = S^p \amalg S^q$. D'après I.4.1., I.4.3. et I.6.3., on a

$$\Omega_{p+q-m+j+1}(S^p \times S^q ; 0) \approx \pi^s_{p+q-m+j+1} \oplus \pi^s_{p-m+j+1} \oplus \pi^s_{q-m+j+1} \oplus \pi^s_{j-m+1} .$$

D'après la proposition 6.1., on a donc :

Proposition 8.1.- Pour $0 \leqslant j \leqslant 2m-3\sup(p,q) - 4$ et tout plongement $f_o : S^p \amalg S^q \to \mathbb{R}^m$, le groupe $\pi_j(\mathcal{P}\ell(S^p \amalg S^q,\mathbb{R}^m), f_o)$ est isomorphe au groupe

$$\pi_j(V_{m,p+1}) \oplus \pi_j(V_{m,q+1}) \oplus \pi^s_{p+q-m+j+1} \oplus \pi^s_{p-m+j+1} \oplus \pi^s_{q-m+j+1} \oplus \pi^s_{j-m+1} .$$

Si de plus $j < m - \sup(p,q) - 2$, on a

$$\pi_j(\mathcal{P}\ell(S^p \amalg S^q,\mathbb{R}^m), f_o) \approx \pi^s_{p+q-m+j+1} \approx \pi_{p+j}(S^{m-q-1}) .$$

On appelle 2-chaîne dans $\mathbb{R}^m$ un plongement $f : S^p \amalg S^q \to \mathbb{R}^m$. Si $2m \geqslant 3\sup(p,q) + 4$, les classes d'isotopie des 2-chaînes correspondent aux éléments de $\pi_p(S^{m-q-1})$, (Haefliger, [9], 1.3. c.).

Lorsque $j = m-p-q-1$, on peut définir comme au §2, le nombre d'enlacement d'un élément $x \in \pi_j(\mathcal{P}\ell(V_1^p \amalg V_1^q, \mathbb{R}^m), f_o)$: nombre entier ou entier modulo 2 suivant que V est orientable ou non. On définit de même le nombre d'enlacement d'un plongement $f_1 : V_1^p \amalg V_2^q \to \mathbb{R}^{p+q+1}$. Pour $q \leqslant p \leqslant 2q-2$, les classes d'isotopie des plongements de $V_1^p \amalg V_2^q$ dans $\mathbb{R}^{p+q+1}$ sont classifiées par leurs nombres d'enlacement.

CHAPITRE VII : EXTENSIONS DU RESULTAT FONDAMENTAL.

La méthode utilisée dans les chapitres IV et V pour définir l'homomorphisme α_k et démontrer le résultat fondamental peut être utilisée dans bien d'autres situations. En particulier, elle permet d'obtenir des résultats sur les espaces de plongements lorsque l'on considère des variétés à bord et sur les espaces d'immersions.

1.- Extensions aux variétés à bord.

Dans ce paragraphe V^n désigne une variété compacte à bord, M^m une variété. De la même manière que dans le cas d'une variété V^n sans bord (cf. IV.1.1.), on définit une variété $W^{2n} = (V^n \times V^n - \overset{\circ}{T}_\varepsilon)/s$, un espace $\mathcal{C}_f$, un fibré de Serre $p : \mathcal{C}_f \to W$ et un fibré vectoriel stable θ_f de base $\mathcal{C}_f$. On note $\partial_1 W = (\partial T_\varepsilon)/s$, $\partial_2 W = \overline{\partial W - \partial_1 W}$.

On se donne un plongement $g_o : \partial V \to \partial M$. On note $\mathrm{Hom}(V^n, M^m ; g_o)$ l'espace des applications différentiables $f : V^n \to M^m$ telles que $f|\partial V = g_o$, muni de la topologie $\mathcal{C}^\infty$. On note $P\ell(V^n, M^m ; g_o)$ le sous-espace des plongements.

En généralisant la définition de α_k , on obtient pour tout entier $k \geqslant 1$ et tout plongement $f_o : V^n \to M^m$ un homomorphisme (application pointée si $k = 1$).

$$\alpha_k : \pi_k(\mathrm{Hom}(V^n, M^m ; f_o|\partial V), P\ell, f_o) \to \Omega_{2n-m+k}(\mathcal{C}_{f_o}, \partial_1 W ; \theta_{f_o}).$$

De plus à tout $f \in \mathrm{Hom}(V^n, M^m ; g_o)$ on peut associer $\alpha_o(f) \in \Omega_{2n-m}(\mathcal{C}_f, \partial_1 W ; \theta_f)$ tel que $\alpha_o(f) = 0$ si f est homotope rel ∂V^n

à un plongement. On montre alors le théorème suivant :

Théorème 1.1.- α_k est un isomorphisme (bijection si $k = 1$) pour $k < 2m-3n-3$, un épimorphisme (surjection si $k = 1$) pour $k = 2m-3n-2$. De plus pour $2m-3n-3 \geqslant 0$; $f \in \mathrm{Hom}(V^n, M^m ; g_o)$ est homotope rel ∂V^n à un plongement si et seulement si $\alpha_0(f) = 0$.

Notons $P\ell_*(S^n, S^m)$ l'espace des plongements de S^n dans S^m dont on s'est donné le germe en un point de S^n . L'espace $P\ell_*(S^n, S^m)$ a le même type d'homotopie que l'espace $P\ell(D^n, D^m ; i)$ où $i : S^{n-1} \subset S^{m-1}$ est l'inclusion naturelle. L'espace $\mathrm{Hom}(D^n, D^m ; i)$ étant convexe, d'après le théorème 1.1. pour $0 \leqslant j < 2m-3n-4$, on a

$$\pi_j(\mathcal{P}\ell_*(S^n, S^m), f_o) \approx \Omega_{2n-m+j+1}(W(D^n), \partial_1 W(D^n) ; \theta) .$$

Mais $W(D^n)$ se rétracte par déformation sur $\partial_1 W(D^n)$, donc d'après I.7.1. les groupes de cordisme normal de $(W(D^n), \partial_1 W(D^n) ; \theta)$ sont triviaux en toute dimension. On a donc :

Proposition 1.2.- ([5], 7). Pour $0 \leqslant j < 2m-3n-4$, on a $\pi_j(\mathcal{P}\ell_*(S^n, S^m)) = 0$ pour tout point de base.

Dans [18] Švarc montre que $\tilde{H}_j(P\ell_*(S^n, S^m)) = 0$, pour $0 \leqslant j < 2m-4n-3$. Il montre aussi que l'espace $P\ell_*(S^1, S^n)$ pour $n \geqslant 4$ est acyclique en toute dimension $< 3n-10$ excepté $2n-6$, le groupe $H_{2n-6}(P\ell_*(S^1, S^n) ; \mathbf{Z})$ étant isomorphe au groupe $\mathbf{Z}$ des entiers.

En généralisant la définition de α_k , on obtient pour tout entier $k \geqslant 1$ et tout plongement $f_o : V^n \to M^m$ un homomorphisme (application pointée si

$k = 1$)

$$\alpha_k : \pi_k(\mathrm{Hom}(V^n, M^m), P\ell, f_o) \to \Omega_{2n-m+k}(\mathscr{C}_{f_o}, \partial_1 W \cup \bar{p}^{-1}(\partial_2 W) ; \theta_{f_o}) .$$

De plus à tout $f \in \mathrm{Hom}(V^n, M^m)$, on peut associer $\alpha_o(f) \in \Omega_{2n-m}(\mathscr{C}_f, \partial_1 W \cup \bar{p}^{-1}(\partial_2 W); \theta_f)$ tel que $\alpha_o(f) = 0$ si f est homotope à un plongement. On a alors :

Théorème 1.3.- Soit V^n une variété compacte à bord (resp. pouvant être construite par adjonction d'anses d'indices $\leqslant p < n$). Alors α_k est un isomorphisme (bijection si $k = 1$) pour $1 \leqslant k \leqslant 2m-3n-3$ (resp. $1 \leqslant k \leqslant 2m-2n-p-1$), un épimorphisme (surjection si $k = 1$) pour $1 \leqslant k \leqslant 2m-3n-2$ (resp. $1 \leqslant k \leqslant 2m-2n-p$). De plus pour $2m-3n-3 \geqslant 0$ (resp. $2m-2n-p-1 \geqslant 0$), $f \in \mathrm{Hom}(V^n, M^m)$ est homotope à un plongement si et seulement si $\alpha_o(f) = 0$.

On applique ce qui précède en prenant pour V^n le disque D^n et pour M^m l'espace euclidien $\mathbb{R}^m$. Cela donne pour $0 \leqslant j \leqslant 2m-2n-2$ un isomorphisme $\pi_j(\mathscr{P}\ell(D^n, \mathbb{R}^m)) \approx \Omega^{m-j-1}(W(D^n) ; m\omega)$. L'espace $W(D^n)$ se rétracte par déformation sur $\mathbb{P}^{n-1}$. Par suite on a

$$\pi_j(\mathscr{P}\ell(D^n, \mathbb{R}^m)) \approx \Omega^{m-j-1}(\mathbb{P}^{n-1} ; m\lambda_{n-1})$$

$$\approx \Omega_{n-m+j}(\mathbb{P}^{n-1} ; (m-n)\lambda_{n-1}) .$$

Par ailleurs on sait que $\pi_j(\mathscr{P}\ell(D^n, \mathbb{R}^m)) \approx \pi_j(V_{m,n})$ où $V_{m,n}$ est la variété de Stiefel des n-repères de $\mathbb{R}^m$. On a donc :

Proposition 1.4.- Pour $0 \leqslant j \leqslant 2m-2n-2$, on a des isomorphismes

$$\Omega_{n-m+j}(\mathbb{P}^{n-1} ; (m-n)\lambda_{n-1}) \approx \pi_j(T((m-n)\lambda_{n-1})) \approx \pi_j(V_{m,n}) ,$$

où λ_{n-1} est le 1-fibré vectoriel canonique de base l'espace projectif réel $\mathbb{P}^{n-1}$, T = espace de Thom et $V_{m,n}$ est la variété de Stiefel des

n-repères de $\mathbb{R}^m$.

Notons $r : \mathcal{P}_\ell(D^{n+1},\mathbb{R}^m) \to \mathcal{P}_\ell(S^n,\mathbb{R}^m)$ l'application définie par $r(f) = f|S^n$, S^n étant identifié au bord de D^{n+1} . Notons j l'inclusion de $W(S^n)$ dans $W(D^{n+1})$. Considérons le diagramme commutatif (on a une relation $D^{-1} \circ \alpha_j = S \circ \delta$ comme en IV.3.) :

$$\begin{array}{ccc} \pi_j(\mathcal{P}_\ell(D^{n+1},\mathbb{R}^m)) & \xrightarrow{r_*} & \pi_j(\mathcal{P}_\ell(S^n,\mathbb{R}^m)) \\ \downarrow{\scriptstyle D^{-1}\circ\alpha_j} & & \downarrow{\scriptstyle D^{-1}\circ\alpha_j} \\ \Omega^{m-j-1}(W(D^{n+1});m\omega) & \xrightarrow{j^*} & \Omega^{m-j-1}(W(S^n);\, m\omega) \end{array}$$

L'inclusion j admet une rétraction par déformation, par suite j^* est un isomorphisme. On a donc :

Proposition 1.5.- L'application de restriction $r : \mathcal{P}_\ell(D^{n+1},\mathbb{R}^m) \to \mathcal{P}_\ell(S^n,\mathbb{R}^m)$ induit un isomorphisme des groupes d'homotopie en dimension j : $0 \leqslant j \leqslant 2m-3n-4$. En particulier $\pi_j(\mathcal{P}_\ell(S^n,\mathbb{R}^m)) \approx \pi_j(V_{m,n+1})$ pour $0 \leqslant j \leqslant 2m-3n-4$. De plus pour $2 \leqslant j \leqslant 2m-2n-4$ et tout plongement $f_o : S^n \to \mathbb{R}^m$, le groupe abélien $\pi_j(\mathcal{P}_\ell(S^n,\mathbb{R}^m), f_o)$ est somme directe du groupe $\pi_j(V_{m,n+1})$ et d'un groupe abélien.

Notons $\mathcal{P}_{\ell_{iso}}(S^n,\mathbb{R}^m)$ l'espace des plongements isométriques de S^n dans $\mathbb{R}^m$. La première partie de la proposition 1.5. revient à dire que l'inclusion $\mathcal{P}_{\ell_{iso}}(S^n,\mathbb{R}^m) \subset \mathcal{P}_\ell(S^n,\mathbb{R}^m)$ induit un isomorphisme des groupes d'homotopie en dimension j , $0 \leqslant j \leqslant 2m-3n-4$. Il suffit pour le voir de considérer le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}\ell(D^{n+1},\mathbb{R}^m) & \xrightarrow{r} & \mathcal{P}\ell(S^n,\mathbb{R}^m) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{P}\ell_{iso}(D^{n+1},\mathbb{R}^m) & \xrightarrow{\approx} & \mathcal{P}\ell_{iso}(S^n,\mathbb{R}^m) \end{array}$$

et de remarquer que l'inclusion $\mathcal{P}\ell_{iso}(D^{n+1},\mathbb{R}^m) \subset \mathcal{P}\ell(D^{n+1},\mathbb{R}^m)$ admet une rétraction par déformation.

2.- Extensions aux espaces d'immersions.

On suppose dans ce paragraphe que V^n est une variété compacte sans bord. On note $\mathrm{Imm}(V^n,M^m)$ le sous-espace de $\mathrm{Hom}(V^n,M^m)$ formé des immersions. f_o désigne un plongement ou une immersion de V^n dans M^m suivant les cas.

En utilisant la méthode ayant servi à définir α_k, on peut définir pour tout entier $k \geqslant 1$ des homomorphismes (applications pointées si $k = 1$)

$$\beta_k : \pi_k(\mathrm{Imm}(V^n,M^m),P\ell,f_o) \to \Omega_{2n-m+k}(\mathcal{C}_{f_o} ; \theta_{f_o}),\ f_o \in P\ell(V^n,M^m)$$

$$\gamma_k : \pi_k(\mathrm{Hom}(V^n,M^m),\mathrm{Imm},f_o) \to \Omega_{2n-m+k-1}(\partial W ; \theta|\partial W),\ f_o \in \mathrm{Imm}(V^n,M^m)\ .$$

De plus à $f \in \mathrm{Imm}(V^n,M^m)$ on peut associer $\beta_o(f) \in \Omega_{2n-m}(\mathcal{C}_f ; \theta_f)$ tel que $\beta_o(f) = 0$ si f est régulièrement homotope à un plongement. A $f \in \mathrm{Hom}(V^n,M^m)$ on peut associer $\gamma_o(f) \in \Omega_{2n-m-1}(\partial W ; \theta|\partial W)$ tel que $\gamma_o(f) = 0$ si f est homotope à une immersion.

Pour tout entier $k \geqslant 1$ et tout plongement $f_o : V^n \to M^m$, α_k, β_k, γ_k entrent dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots \to \pi_{k+1}(\mathrm{Hom},\mathrm{Imm},f_o) & \longrightarrow & \pi_k(\mathrm{Imm},P\ell,f_o) & \longrightarrow & \pi_k(\mathrm{Hom},P\ell,f_o) & \longrightarrow & \pi_k(\mathrm{Hom},\mathrm{Imm},f_o) \\ \downarrow \gamma_{k+1} & & \downarrow \beta_k & & \downarrow \alpha_k & & \downarrow \gamma_k \\ \cdots \to \Omega_{2n-m+k}(\partial W ; \theta|\partial W) & \xrightarrow{i_*} & \Omega_{2n-m+k}(\mathcal{C}_{f_o} ; \theta_{f_o}) & \xrightarrow{j_*} & \Omega_{2n-m+k}(\mathcal{C}_{f_o} ; \partial W ; \theta_{f_o}) & \xrightarrow{\partial} & \Omega_{2n-m+k-1}(\partial W ; \theta|\partial W) \end{array}$$

La première ligne horizontale du diagramme est la suite exacte d'homotopie du triple $(\mathrm{Hom}(V^n,M^m), \mathrm{Imm}, P\ell)$ au point de base $f_o \in P\ell(V^n,M^m)$. La deuxième ligne horizontale du diagramme est la suite exacte de bordisme normal de la paire $(\mathcal{C}_{f_o}, \partial W ; \theta_{f_o})$.

De plus on a $\gamma_o(f) = \partial(\alpha_o(f))$ pour $f \in \mathrm{Hom}(V^n,M^m)$, $\alpha_o(f) = j_*(\beta_o(f))$ pour $f \in \mathrm{Imm}(V^n,M^m)$.

Le théorème A se généralise alors comme suit :

Théorème 2.1.-

Pour $1 \leqslant k \leqslant 2m-3n-3$, α_k et β_k sont des isomorphismes (bijections si k=1).

Pour $1 \leqslant k \leqslant 2m-3n-2$, α_k et β_k sont des épimorphismes (surjections si k=1).

Pour $1 \leqslant k \leqslant 2m-3n-1$, γ_k est un isomorphisme (bijection si k=1).

Pour $1 \leqslant k \leqslant 2m-3n$, γ_k est un épimorphisme (surjection si k=1).

Si $2m-3n-3 \geqslant 0$ et $\alpha_o(f) = 0$, f est homotope à un plongement.

Si $2m-3n-3 \geqslant 0$ et $\beta_o(f) = 0$, f est régulièrement homotope à un plongement.

Si $2m-3n-1 \geqslant 0$ et $\gamma_o(f) = 0$, f est homotope à une immersion.

On suppose V^n connexe, $n \geqslant 1$, ce qui entraîne $W(V^n)$ connexe. Soit $f : V^n \to \mathbf{R}^{2n}$ une immersion. A f est associé $\beta_o(f) \in \Omega_o(W ; \theta) \approx H_o(W ; \mathbf{Z}(\theta))$. Mais $\theta = (2n)\omega \oplus \nu W$, de sorte que $\mathbf{Z}(\theta) \approx \mathbf{Z}(\nu W)$. Par suite $H_o(W ; \mathbf{Z}(\theta)) \approx H_o(W ; \mathbf{Z}(\nu W)) \approx \mathbf{Z}$ ou $\mathbf{Z}_2$ suivant que W est orientable ou non.

Si n est impair ou si V n'est pas orientable, W n'est pas orientable, par suite $\beta_o(f) \in \mathbf{Z}_2$. Si n est pair et si V est orienté, W est

orienté, on a alors un isomorphisme naturel $H_0(W ; \mathbb{Z}(\nu W)) \approx \mathbb{Z}$, par suite $\beta_0(f) \in \mathbb{Z}$.

$\beta_0(f) \in \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}_2$ ainsi défini s'appelle le nombre algébrique de self-intersections de f. Et d'après le théorème 2.1., on a :

Proposition 2.2. (Whitney [20]). Soit V^n une variété compacte connexe sans bord. Soit $f : V^n \to \mathbb{R}^{2n}$ une immersion. Pour $n \geq 3$, f est régulièrement homotope à un plongement si et seulement si $\beta_0(f) = 0$.

Lorsque $M^m = \mathbb{R}^m$, l'invariant $\gamma_0(f) \in \Omega_{2n-m-1}(\partial W ; \theta|\partial W)$ ne dépend pas de la classe d'homotopie de f. On note $\gamma_0(V^n,m) = \gamma_0(f)$. On a $\gamma_0(V^n,m) = \bar{\sigma}(m\omega|\partial W)$.

Supposons V^n connexe, $n \geq 1$ et $M^m = \mathbb{R}^{2n-1}$. ∂W est alors connexe non vide. L'élément $\gamma_0(V^n,2n-1) \in \Omega_0(\partial W ; \theta|\partial W)$ est d'ordre 2 d'après II.[illegible]...

Considérons la suite exacte

$$\Omega_1(W,\partial W ; \theta) \xrightarrow{\partial} \Omega_0(\partial W ; \theta|\partial W) \xrightarrow{i_*} \Omega_0(W ; \theta) .$$

Comme $\gamma_0(V^n,2n-1) = \partial(\alpha_0(V^n,m))$, on a $i_*(\gamma_0(V^n,2n-1)) = 0$. Si $\Omega_0(\partial W ; \theta|\partial W) \approx \mathbb{Z}$, on a nécessairement $\gamma_0(V^n,2n-1) = 0$ car $\gamma_0(V^n,2n-1)$ est un élément d'ordre 2. Si $\Omega_0(\partial W ; \theta|\partial W) \approx \mathbb{Z}_2$, i_* est un isomorphisme, et comme $i_*(\gamma_0(V^n,2n-1)) = 0$, on a encore $\gamma_0(V^n,2n-1) = 0$. L'obstruction $\gamma_0(V^n,2n-1)$ est par conséquent toujours nulle. On a donc :

Proposition 2.3.- (Whitney [21]). Soit V^n une variété compacte connexe sans bord. Pour $n \geq 3$, il existe toujours une immersion de V^n dans $\mathbb{R}^{2n-1}$.

Etudions pour terminer les groupes $\pi_k(\mathrm{Imm}(S^n,\mathbb{R}^m),P\ell, f_0)$, $k \geq 1$.

L'application $\pi : W(S^n) \to \mathbb{P}^n$ définie en VI.6. est un fibré en boules. Par suite, on a un isomorphisme

$$\Omega_{2n-m+k}(W(S^n) ; \theta) \approx \Omega_{2n-m+k}(\mathbb{P}^n ; (m-n)\lambda) .$$

D'après I.7.3., ce dernier groupe est isomorphe pour $k \leqslant 2m-3n-2$ au groupe $\pi_{k+n}(V_{m+1,n+1})$. D'après le théorème 2.1., on a donc

Proposition 2.4.- Pour $1 \leqslant k \leqslant 2m-3n-3$ et tout plongement $f_o : S^n \to \mathbb{R}^m$, le groupe $\pi_k(\mathrm{Imm}(S^n,\mathbb{R}^m), P\ell, f_o)$, $k \geqslant 1$, est isomorphe au groupe $\pi_{k+n}(V_{m+1,n+1})$.

Compte-tenu de VI.6.2., on en déduit la proposition suivante :

Proposition 2.5.- Pour $0 \leqslant j \leqslant m-n-2$, $j \leqslant 2m-3n-3$, on a

$$\pi_j(\mathrm{Imm}(S^n,\mathbb{R}^m)) \approx \pi_{j+n}(V_{m+1,n+1}) .$$

D'après le théorème de classification des immersions de Smale [16], (généralisé aux familles d'immersions à plusieurs paramètres), la proposition 2.5. est valable en supprimant l'hypothèse $j \leqslant 2m-3n-3$.

Bibliographie.

-::-

[1] J. CERF, Topologie de certains espaces de plongements, Bull. Soc. Math. Fr., 89, 1961, p. 227-380.

[2] J.P. DAX, C.R. Acad. Sc. Paris, 264, série A, 1967, p. 499-502.

[3] J.P. DAX, C.R. Acad. Sc. Paris, 267, série A, 1968, p. 190-193.

[4] J.P. DAX, C.R. Acad. Sc. Paris, 268, série A, 1969, p. 1327-1330.

[5] J.P. DAX, C.R. Acad. Sc. Paris, 270, série A, 1970, p. 1089-1092.

[6] D.D.J. HACON, Embeddings of S^p in $S^1 \times S^q$ in the metastable range, Topology, 7, 1968, p. 1-10.

[7] A. HAEFLIGER, Plongements différentiables de variétés dans variétés, Comment. Math. Helv., 36, 1961, p. 47-82.

[8] A. HAEFLIGER, Immersions in the stable range, Annals of Math., (2) 75, 1962, p. 231-241.

[9] A. HAEFLIGER, Plongements de variétés dans le domaine stable, Séminaire Bourbaki, 15^e année, 1964, exposé 245.

[10] A. HAEFLIGER, Plongements différentiables dans le domaine stable, Comment. Math. Helv., 37, 1963, p. 155-176.

[11] A. HAEFLIGER et M.W. HIRSCH, On the existence and classification of differentiable embeddings, Topology, 2, 1963, p. 129-135.

[12] D. HUSEMOLLER, Fibre bundles, McGraw-Hill, 1966.

[13] C. MORLET, Le lemme de Thom et les théorèmes de plongement de Whitney, Séminaire H. Cartan, 14^e année, 1961/62, exp. 4-5-6-7.

[14] C. MORLET, Plongements et automorphismes de variétés. Collège de France, Cours Peccot, 1969.

[15] L.S. PONTRJAGIN, Smooth manifolds and their applications in homotopy theory, Amer. Math. Soc. Translations, Ser. 2, II, 1959, p. 1-114.

[16] S. SMALE, The classification of immersions of spheres in Euclidean spaces, Ann. of Math. (2) 69, 1959, p. 327-344.

[17] E.H. SPANIER, Algebraic Topology, McGraw-Hill, 1966.

[18] A.S. ŠVARC, Homology of spaces of smooth imbeddings, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 167, 1966, p. 41-44. Traduction anglaise : Soviet Math. Dokl., 7, 1966, p. 339-342.

[19] R. THOM, Quelques propriétés globales des variétés différentiables, Comment. Math. Helv., 28, 1954, p. 17-86.

[20] H. WHITNEY, The self-intersections of a smooth n-manifold in 2n-space, Ann. of Math., 45, 1944, p. 220-246.

[21] H. WHITNEY, The singularities of a smooth n-manifold in (2n-1)-space, Ann. of Math., (2) 45, 1944, p. 247-293.

[22] W.T. WU, On the isotopy of C^r-manifolds of dimension n in euclidean (2n+1)-space, Sci. Record (N.S.), 2, 1958, p. 271-275.

Table des matières

INTRODUCTION

CHAPITRE I - BORDISME NORMAL.

1. Définition des groupes de bordisme normal.
2. Isomorphisme de Thom-Pontrjagin.
3. Propriétés du type homologique.
4. Conséquences des propriétés homologiques.
5. Relations avec les groupes d'homologie.
6. Isomorphisme de Thom-Gysin.
7. Détermination de certains groupes de bordisme normal.
8. Revêtements à deux feuillets.

CHAPITRE II - COBORDISME NORMAL.

1. Définition des groupes de cobordisme normal.
2. Propriétés du type cohomologique.
3. Conséquences des propriétés cohomologiques.
4. Relations avec les groupes de cohomologie.
5. Dualité de Poincaré.
6. Existence d'une section partout non nulle d'un fibré vectoriel réel.

CHAPITRE III - APPLICATIONS EXCELLENTES ET APPLICATIONS PARFAITES.

1. Définition et étude des applications excellentes.
2. Etude des points singuliers de type $\Sigma^{1,0}$.
3. Définition et description des applications parfaites.

CHAPITRE IV - ETUDE DES ESPACES DE PLONGEMENTS.

1. Construction du fibré vectoriel stable θ_f.
2. Définition de l'application α_k.
3. Enoncé du résultat fondamental.

CHAPITRE V - DEMONSTRATION DU RESULTAT FONDAMENTAL.

1. Etude du noyau de α_k.
2. Construction d'un modèle de déformation.
3. Première étape de la démonstration.
4. Deuxième étape de la démonstration.
5. Surjectivité de α_{k+1} pour $0 \leqslant k \leqslant 2m-3n-3$.

CHAPITRE VI - CONSEQUENCES DU RESULTAT FONDAMENTAL.

1. Remarques sur les groupes d'homotopie des espaces de plongements.
2. Généralisation à k paramètres du théorème de Whitney sur la suppression des points doubles isolés.
3. Cas où l'une des variétés V^n , M^m est c-connexe.
4. Cas où l'on fait des hypothèses de connexité sur $f : V^n \to M^m$.
5. Tensorisation avec les rationnels.
6. Espace des plongements de S^n dans $\mathbb{R}^m$.
7. Espace des plongements de V^n dans $S^1 \times \mathbb{R}^{m-1}$.
8. Cas où V a plusieurs composantes connexes de dimensions différentes.

CHAPITRE VII - EXTENSIONS DU RESULTAT FONDAMENTAL.

1. Extensions aux variétés à bord.
2. Extensions aux espaces d'immersions.

BIBLIOGRAPHIE.

TABLE DES MATIERES.